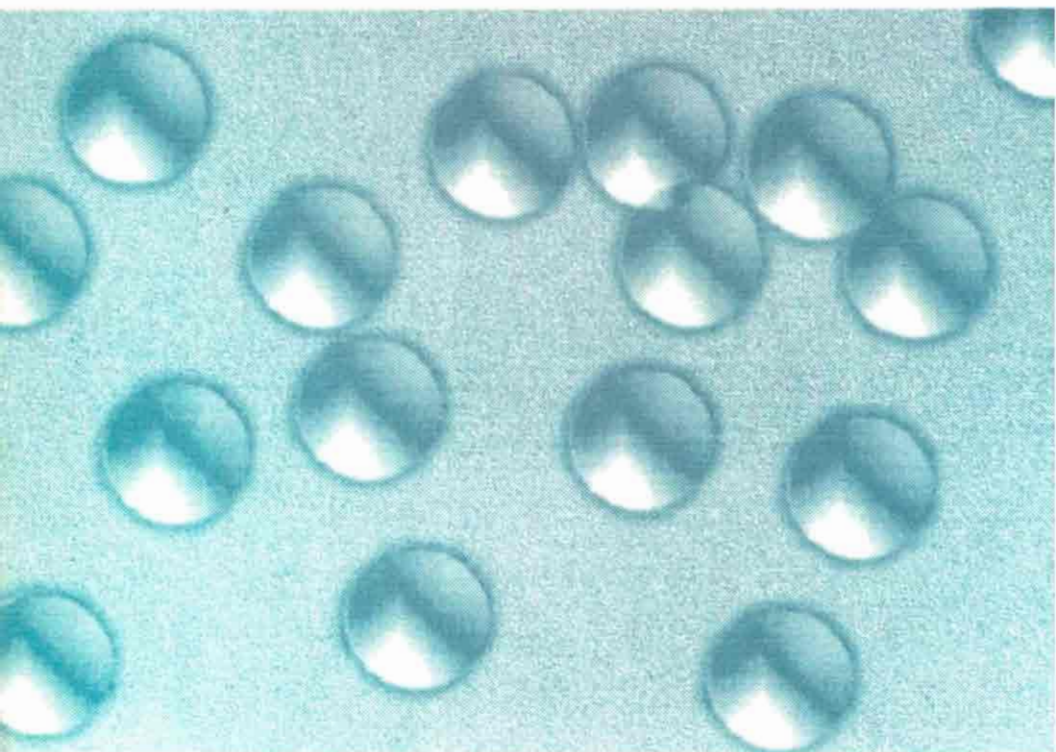


Ф. Ж. Вильф

# ОСНОВЫ ФИЗИКИ СВЕРХПРОВОДНИКОВ



УРСС

**Ф. Ж. Вильф**

**ОСНОВЫ ФИЗИКИ  
СВЕРХПРОВОДНИКОВ**



**УРСС  
Москва 1998**

**Вильф Фернандо Жозевич. Основы физики сверхпроводников.**  
М.: «УРСС», 1998. — 368 с.

В книге рассматриваются основные вопросы теории сверхпроводимости. Очень подробно анализируются реакции нормального и сверхпроводящего металлов на включение как магнитного поля, так и поля электрического. Даются качественные и количественные объяснения таким проявлениям сверхпроводимости как эффект Майснера-Оксенфелда и протекание постоянного тока в отсутствие электрического поля, но в присутствии дефектов-рассеивателей электронов. Приводится описание кинетики перехода металла из сверхпроводящего состояния в нормальное (и обратно) при достижении критической температуры и критической плотности тока. Приведен подробный вывод формулы Лондонов и подробный вывод соотношения для критической плотности тока.

Дано квантовое описание сверхпроводимости. Выведены выражения для векторов основного и возбужденного состояний коллектива сверхпроводящих электронов в рамках модели Бардина, Купера, Шриффера. Выражение для гамильтониана Фрелиха выведено из “первых принципов” квантовой механики. Рассмотрены туннельные переходы “неспаренных” электронов.

В приложениях приведен подробный расчет диамагнитной восприимчивости Ландау и рассмотрен один из аспектов высокотемпературной сверхпроводимости.

Книга предназначена для преподавателей, читающих лекционные курсы по специализациям физики твердого тела, твердотельной электроники, материаловедения, а также — общей, экспериментальной и теоретической физики. Книга будет полезна студентам, обучающимся по вышеперечисленным специализациям, а также исследователям и инженерам, работающим в областях сверхпроводниковой электроники и электротехники.

Издательство «УРСС». 111672, г. Москва, ул. Новохасинская, д. 27/174.  
Лицензия ЛР № 063377 от 23.05.94 г. Подписано к печати 11.05.98 г.  
Формат 60×84/16. Печ. л. 23. Зак. № 72  
Отпечатано в ТОО «Типография ПЭМ». 121471, г. Москва, Можайское шоссе, 25.

ISBN 5-88417-143-9

© Ф. Ж. Вильф, 1998  
© «УРСС», 1998

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена детальному описанию физических принципов, лежащих в основе теории сверхпроводимости. Как ни странно, но именно с основными принципами познакомиться сегодня труднее всего. Что же касается эффектов Джозефсона или проблем сверхпроводниковой электроники или электротехники, то все это достаточно обстоятельно изложено во многих монографиях и учебных пособиях, изданных еще до 1989 года.<sup>1)</sup>

Настоящая книга очень сильно отличается от написанных на ту же тему.

1. Изложение ведется чисто индуктивным методом. Исходным пунктом считаются неожиданные (для неискушенного читателя) результаты двух экспериментов: обнаружение идеальной проводимости металла, содержащего рассеиватели электронов, и обнаружение сильной диамагнитной реакции металла, обладающего идеальной проводимостью (эффект Майснера-Оксенфельда).

Предполагается, что читатель, даже будучи неискушенным, все же имеет представление об идеальной проводимости нормального (“обычного”) металла при условии (практически нереализуемом), что в нем не содержатся дефекты — рассеиватели электронов. Удивление читателя должен тогда вызвать тот факт, что реальный (содержащий дефекты) металл может существовать в такой фазе, в которой электроны по-прежнему сталкиваются с дефектами, а ток тем не менее не затухает несмотря на отсутствие уже внутри образца металла — элемента цепи — электрического поля, вызвавшего ток.

Предполагается, что читателю также известно о существовании сильной диамагнитной реакции электронов нормального металла на переменное магнитное поле (скин-эффект). Тем не менее внимание читателя обращается на то, что принципиально важным для возникновения скин-эффекта в нормальном металле является... рассеяние электронов дефектами<sup>2)</sup>. В таком случае, если взять сверхпроводник, лишенный дефектов и при  $T = 0$  К, то в нем, казалось бы, не должна даже возникать сильная диамагнитная реакция на включение поля. Удивительно, но она возникает<sup>3)</sup>.

2. Дальнейшая теория разрабатывается, с целью дать непротиворечивое объяснение обоим упомянутым результатам. Для проверки

---

1) Эта книга была подготовлена к изданию в 1989 году.

2) Разумеется, именно из-за этого рассеяния возникающая на этапе включения магнитного поля сильная диамагнитная реакция и не выживает, когда поле становится стационарным.

3) Естественно, что возникнув, она обязательно выживает в стационарном поле, поскольку удельное сопротивление сверхпроводника равно нулю.

выводов теории используются три других фундаментальных эксперимента. В одном из них было открыто существование критического тока, а в другом — существование критической температуры; в третьем — особенности туннелирования электронов через контакты “нормальный металл — сверхпроводник” и “сверхпроводник — сверхпроводник”.

При рассмотрении любого аспекта теории вначале делается качественный анализ с целью добиться ясного и очевидного представления о физической природе явления (дается так называемое “объяснение на пальцах”). Затем выполняется детальный расчет.

В книге содержится ряд новых результатов:

1. Доказательство классической (неквантовой) природы как слабого диамагнетизма Ландау, так и сильной диамагнитной реакции сверхпроводника;

2. Вывод формулы Лондонов — как в рамках электродинамики, так и термодинамики;

3. Качественное объяснение незатухания тока в сверхпроводнике (после исчезновения электрического поля) несмотря на идущие процессы рассеяния электронов на дефектах;

4. Качественное объяснение обратимого перехода между нормальной и сверхпроводящей фазами металла;

5. Новый вывод гамильтониана Фрелиха;

6. Вывод волновой функции БКШ (Бардина, Купера, Шриффера);

7. Вывод выражения для критической плотности тока в сверхпроводнике;

8. Объяснение удвоения энергетической щели в спектре одночастичных возбуждений сверхпроводника.

Кроме того в книге дан вывод температурной зависимости энергетической щели. Этот вывод является очень важным в методическом отношении, но полностью его не найти в литературе.<sup>1)</sup>

Книга адресована в первую очередь преподавателям ВУЗов и специалистам — инженерам и научным сотрудникам, — работающим в областях сверхпроводниковой электроники и электротехники. Книга также может быть использована в качестве пособия студентами ВУЗов, обучающимися по различным специализациям физики твердого тела, твердотельной электроники, общей, экспериментальной и теоретической физики.

Предполагается, что читатели изучали электродинамику, термодинамику, нерелятивистскую квантовую механику, основы физики твердого тела по крайней мере в объемах курсов, читаемых в технических ВУЗах.

1) Важнейшие фрагменты вывода содержатся в пионерской работе Бардина, Купера, Шриффера, но детали расчета авторы, естественно, опустили, поскольку опубликовали свою работу в журнале.

# Глава 1. ДИАМАГНИТНАЯ РЕАКЦИЯ ВЕЩЕСТВА

## §1.1. Электродинамический подход

### 1.1.1. Постановка задачи

На протяжении всего §1.1 будет рассматриваться конкретный пример, представленный на рис. 1.1. Источником внешнего магнитного поля служит соленоид, подключаемый к источнику постоянной ЭДС. Этот соленоид — бесконечно протяженный вдоль осей  $X, Z$  — конечного размера вдоль оси  $Y$ . Образец диамагнетика — также бесконечно протяженный вдоль осей  $X, Z$  и конечного размера вдоль оси  $Y$  — находится внутри соленоида. Оси координат  $X, Z$  являются осями симметрии. Условимся считать магнитное поле внутри соленоида, но вне образца (в интервалах  $-L \leq y \leq -l$  и  $l \leq y \leq L$ ) пространственно однородным в любой момент времени.

Диамагнитная реакция образца на внешнее магнитное поле состоит в возникновении в образце — в плоскости  $(xy)$ , перпендикулярной вектору плотности внешнего магнитного потока<sup>1)</sup>, — вихревого тока, направленного так, чтобы порожденный этим током магнитный поток оказался противоположным внешнему.

Нашей задачей будет установить величину и распределение плотности вихревого тока в  $(xy)$ -сечении образца.

Казалось бы, описать процесс возникновения и установления диамагнитной реакции несложно, поскольку хорошо известны соответствующие уравнения:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{B}(t)}{\mu_0} + \vec{H}_n(\vec{r}, t), \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_n(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (1.4)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей внутри образца;  $\vec{B}$  — плотность внешнего магнитного потока, одно-

<sup>1)</sup> Внешним будет всегда называться поток, создаваемый соленоидом, когда внутри него нет образца, то есть поток внутри пустого соленоида.

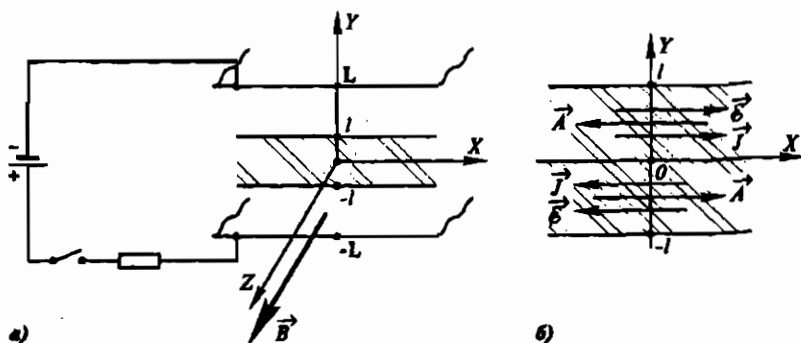


Рис. 1.1. Соленоид и образец:

а — взаимное расположение соленоида, образца и схема электрической цепи. Магнитный поток плотностью  $\vec{B}$  создается соленоидом после замыкания тумблера; б — векторы  $\vec{A}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{J}$  в сечении образца

родно распределенная в пределах  $-L \leq y \leq L$ ;  $\vec{H}_n$  — напряженность того магнитного поля внутри образца, которое порождено токами проводимости и смещения<sup>1)</sup>;  $\vec{A}$  — вектор-потенциал магнитного поля внутри образца;  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные вакуума;  $\vec{J}$  — плотность тока проводимости.

Заметим, что уравнение (1.4) — лишь традиционное свидетельство чисто вихревой природы магнитного поля, тогда как электрическое может быть и потенциальным. Мы будем считать поля, фигурирующие именно в уравнении (1.1), чисто вихревыми.

Четыре уравнения (1.1)–(1.4) содержат пять неизвестных:  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{H}_n$ ,  $\vec{A}$ ,  $\vec{J}$ . В поисках недостающего уравнения следует обратиться к выражению для плотности тока проводимости. Конкретный вид такого выражения, интерпретация входящих в него величин, обоснованность и т. п. — все это подробно рассматривается в главе 2, а сейчас

1) Внешний магнитный поток индуцирует внутри магнетика поле напряженностью  $\vec{H}_n$  (отсюда индекс “н”), которое, складываясь с внешним, образует поле результирующее.

используем традиционное представление в виде:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = q \cdot n(\vec{r}, t) \cdot \vec{V}_{др}(\vec{r}, t), \quad (1.5)$$

в котором  $n(\vec{r}, t)$  — мгновенное значение локальной концентрации электронов проводимости, а  $\vec{V}_{др}(\vec{r}, t)$  — мгновенное значение их дрейфовой скорости.

Теперь нужно было бы выяснить, от чего зависят величины  $n$  и  $\vec{V}_{др}$ . Но вот тут-то мы и сталкиваемся с любопытной ситуацией. Хотя уравнение (1.5) автоматически требует считать токопроводящую среду сплошной, нет никакого сомнения в том, что электрический ток обусловлен движением отдельных заряженных частиц — электронов проводимости металла. Как же быть, если настаивать на использовании определения (1.5)<sup>1)</sup>.

Поступим следующим образом. Представим себе образец как вместилище двух взаимнопроникающих сплошных сред, обладающих конечными и одинаковыми значениями объемных плотностей заряда противоположных знаков (это обеспечит локальную электронейтральность образца). Отрицательно заряженную среду будем считать подвижной и сжимаемой, а положительно заряженную — неподвижной, несжимаемой и жестко связанной с системой координат<sup>2)</sup>. В качестве элементарного свободного носителя заряда выберем такой — очень маленький — элемент объема ( $\delta v$ ) сплошной токопроводящей среды, заряд и масса которого точно равны заряду и массе электрона образца:

$$\delta v = \frac{q}{q \cdot n_0} = \frac{1}{n_0}; \quad \delta v = \frac{m}{m \cdot n_0} = \frac{1}{n_0}, \quad (1.6)$$

где ( $q \cdot n_0$ ) — объемная плотность отрицательного заряда ( $q$  — заряд электрона,  $n_0$  — их равновесная концентрация в образце)<sup>3)</sup>; ( $m \cdot n_0$ ) — объемная плотность массы ( $m$  — масса электрона).

В исходном — бестоковом — состоянии каждый из ( $q, m$ )-элементов отрицательно заряженной среды, естественно, покоится друг относительно друга и относительно элементов положительно заряженной среды. Участвуя в движении (вдоль осей  $Y, X$ , см. рис. 1.1, б), ( $q, m$ )-элементы трутся об элементы положительно заряженной сре-

1) Представление в виде (1.5) позволяет описывать изменение плотности тока во времени.

2) В роли такой среды выступает (в действительности) ионный остов кристалла.

3) В металле ( $1/n_0$ ) =  $10^{-23}$  см<sup>3</sup>.



ды, причем для силы трения также можно использовать традиционное выражение

$$\vec{F}_{\text{тр}}(\vec{r}, t) = -m \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \vec{V}_{\text{др}}(\vec{r}, t), \quad (1.7)$$

в котором:  $\frac{1}{\tau}$  — некая константа, характеризующая трение<sup>1)</sup>;

$\vec{V}_{\text{др}}(\vec{r}, t)$  — скорость, приобретенная  $(q, m)$ -элементом к моменту  $t$  с момента включения магнитного поля.

В присутствии полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  ускорение, испытываемое  $(q, m)$ -элементом, равно

$$\frac{d\vec{V}_{\text{др}}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{q}{m} \cdot \left\{ \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{m \vec{V}_{\text{др}}(\vec{r}, t)}{q \cdot \tau} + \right. \\ \left. + \mu_0 \cdot [\vec{V}_{\text{др}}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] + \vec{E}_{\text{хол}}(\vec{r}, t) \right\}, \quad (1.8)$$

где  $q \cdot \vec{E}$  — сила со стороны чисто вихревого поля;

$$q \cdot \mu_0 \cdot [\vec{V}_{\text{др}}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] \equiv \vec{F}_L(\vec{r}, t) -$$

сила Лоренца, действующая на  $(q, m)$ -элемент, который, будучи в исходном состоянии (до включения магнитного поля), покоился (кстати, очень важно, что только поэтому сила Лоренца оказывается пропорциональной именно приобретенной скорости);  $\vec{E}_{\text{хол}}$  — холловское поле, возникающее из-за нарушения локальной электронейтральности, вызванного смещением  $(q, m)$ -элемента (силой Лоренца) в направлении (вдоль оси  $Y$ , см. рис. 1.1), перпендикулярном направлению движения.<sup>2)</sup>

Естественно, что:

$$\text{div} \vec{E}_{\text{хол}}(\vec{r}, t) = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot [n(\vec{r}, t) - n_0], \quad (1.10)$$

$$q \cdot \frac{dn(\vec{r}, t)}{dt} = \text{div} \vec{J}(\vec{r}, t). \quad (1.11)$$

1) На самом деле  $(1/\tau)$  — частота столкновений одного электрона со всеми дефектами-рассеивателями, содержащимися в образце (см. гл. 2).

2) Элементарные объемы отрицательно заряженной среды считаются свободными. Смещение их от центра к периферии ху сечения образца (в нашем примере) приводит к повышению плотности отрицательного заряда в одном месте за счет понижения в другом. Плотность же заряда положительно заряженной среды остается, по условию, неизменной.

Таким образом к четырем уравнениям (1.1)—(1.4) с пятью неизвестными добавились еще четыре — (1.5), (1.8), (1.10), (1.11) с тремя новыми неизвестными  $\vec{V}_{др}$ ,  $n$ ,  $\vec{E}_{хол}$ .

Однако подчеркнем, что ставшая полной система уравнений, описывающая возникновение и установление диамагнитной реакции, опирается на очень существенное предположение — о применимости понятия “плотность тока”, присущего сплошной среде, для коллектива частиц (электронов проводимости). Если это предположение удастся обосновать, то с введенным нами в качестве свободного носителя заряда ( $q$ ,  $m$ )-элементом среды и впрямь придется отождествить один электрон. Но тогда придется допустить, что каждый из электронов проводимости, пребывая в бестоковом состоянии, покоится, а подобное допущение кажется, по крайней мере на первый взгляд, совершенно невероятным.<sup>1)</sup>

Теперь нужно решить, что делать, если образец заведомо нельзя себе представить сплошной средой, и такие понятия, как “плотность тока в точке”, “концентрация электронов в точке”, строго говоря, физически бессодержательны. Кроме того хорошо известно, что существуют вообще нетокопроводящие вещества.

Конечно, электроны даже и в таких веществах не могут не реагировать на включение магнитного поля, ибо при этом возникает и поле электрическое (вихревое). Однако, в чем же должна состоять диамагнитная реакция, если электроны еще до включения магнитного поля находились в электрическом (потенциальном) поле ядер атомов, если при этом каждый из электронов двигался, а вовсе не покоился, и уж, естественно, не испытывал никакого механического трения?

### 1.1.2. Слабый диамагнетизм

Пусть образец представляет собой систему настолько слабо связанных атомов, что электроны каждого из них можно считать находящимися в его собственном силовом поле. В таком образце ни тока проводимости конечно не возникает, ни нарушения электронейт-

<sup>1)</sup> Заинтригуем читателя замечанием, что тем не менее это и есть то общее, что присуще как идеально чистому сверхпроводнику, так и металлу нормальному, но обязательно содержащему дефекты-рассеиватели электронов.

ральности<sup>1)</sup>. Поэтому можно сразу же написать два согласованных равенства:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.12)$$

$$\vec{E}_{\text{хол}}(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.13)$$

Что касается вышеупомянутого силового поля (обозначим напряженность его символом  $\vec{E}_{\text{сил}}$ ), то его вполне обоснованно следует считать потенциальным (и стационарным) до включения поля магнитного (rot  $\vec{E}_{\text{сил}}(\vec{r}, t \leq 0) = 0$ ). Однако не кажется абсурдным и предположение, что после включения магнитного поля начнет меняться и поле  $\vec{E}_{\text{сил}}$ . Ведь прежде оно было согласовано с характером движения электронов, который под действием силы Лоренца безусловно начнет изменяться. Не может ли поэтому оказаться так, что

$$\text{rot } \vec{E}_{\text{сил}}(\vec{r}, t > 0) \neq 0?$$

В итоге новая система уравнений, описывающих предполагаемую диамагнитную реакцию, имеет вид:

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) + \text{rot } \vec{E}_{\text{сил}}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.14)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{B}(t)}{\mu_0} + \vec{H}_n(\vec{r}, t), \quad (1.15)$$

$$\text{rot } \vec{H}_n(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \cdot \left[ \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}_{\text{сил}}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]. \quad (1.16)$$

Несмотря на то, что в этой системе явно не хватает лишь одного уравнения (которое описывало бы эволюцию поля  $\vec{E}_{\text{сил}}$ ), рискнем

<sup>1)</sup> То понятие электронейтральности, которое было введено для сплошной среды, теряет физическую содержательность при попытке использовать его для внутриатомного пространства. Попросту говоря, образец, о котором идет речь, (электронейтральный в большом объеме) "состоит" из пустоты, в которой присутствуют разноименно заряженные точечные частицы. В этом случае такие понятия, как "электронейтральность", "плотность заряда", "плотность тока" лишаются физической содержательности.

написать два соотношения, которые впоследствии постараемся обосновать:

$$\frac{\partial \vec{E}_{\text{снл}}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.18)$$

Отметим, что из равенства (1.17) и принятого условия  $\text{rot } \vec{E}_{\text{снл}}(t \leq 0) = 0$  следует, что

$$\text{rot } \vec{E}_{\text{снл}}(\vec{r}, t) = 0; \quad (1.19)$$

ведь, если и после включения магнитного поля силовое поле не меняется, оно, разумеется, так и остается потенциальным.<sup>1)</sup>

Совершенно аналогично: поскольку до включения магнитного поля поле вихревое электрическое отсутствовало ( $\vec{E}(\vec{r}, t \leq 0) = 0$ ), оно не появится и после включения, раз уж мы постулировали, что  $\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$ . Тогда следует принять равенство

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.20)$$

Заметим, что столь противоестественное предположение способно привести к совершенно противоположным последствиям. С одной стороны спокойно можно допустить равенство  $\vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ : ведь образец таков, что ток проводимости все равно не возникает. Но с другой стороны какой-то ток, созданный электронами образца, должен же возникнуть; иначе диамагнитная реакция вообще не состоится. А ток этот может быть вызван только вихревым полем  $\vec{E}$ .

Итак, приняв соотношения (1.17), (1.18), мы приходим к полной системе уравнений, которая, однако, оказывается "расщепленной".

В одну подсистему входят уравнения

$$\text{rot } \vec{E}_{\text{снл}}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.19)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.21)$$

<sup>1)</sup> Обоснование предложения (1.17) см. с. 16–18.

Поскольку начальное условие к уравнению (1.21) имеет вид

$$\vec{H}(\vec{r}, t=0) = \frac{\vec{B}(t=0)}{\mu_0},$$

то уравнение (1.21) должно быть заменено на уравнение

$$\vec{H}_n(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.22)$$

Таким образом уравнения (1.19), (1.20), (1.22) образуют полную согласованную подсистему, из которой следует, что диамагнитная реакция... не возникает.<sup>1)</sup>

В другую тоже полную и согласованную подсистему входят уравнения

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{B}(t)}{\mu_0} + \vec{H}_n(\vec{r}, t), \quad (1.23)$$

$$\text{rot } \vec{H}_n(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.24)$$

Хотя из этой подсистемы невозможно понять, чем вызвано поле  $\vec{H}_n$ , нет сомнения в том, что причиной является возникший ток электронов. Распределение его в образце не должно противоречить уравнению (1.24), из которого следует пространственно однородное распределение величины  $\vec{H}_n$  (тем самым и величины  $\vec{H}$ ) внутри образца. Подобному распределению поля  $\vec{H}$  может соответствовать лишь чисто поверхностный вихревой ток<sup>2)</sup>. Поэтому единственное физически обоснованное граничное условие к уравнению (1.24) должно иметь вид:

$$\vec{H}_n(t) = \frac{d\vec{i}_{\text{пов}}(t)}{dz}, \quad (1.25)$$

что означает независимость  $\vec{H}_n(t)$  от  $\vec{r}$ .

1) Забегая вперед (чтобы усложнить читателя), скажем, что на самом деле можно было бы вполне ограничиться предположением (1.17) и вытекающим из него равенством (1.19). Допущение (1.18) (и вытекающее из него равенство (1.20)) принято лишь для упрощения последующего расчета. Как будет показано далее, оно сводится к пренебрежению только очень быстро осциллирующими составляющими полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}_n$  (тем самым и поля  $\vec{H}$ ). Составляющие, меняющиеся во времени плавно, будут учтены. Обоснование допущения (1.18) см. с. 38—41.

2) Формально плотность этого тока была бы бесконечно велика, если бы само это понятие имело в данном случае хоть какую-нибудь содержательность.

Учитывая в соответствии с рис. 1.1 независимость  $\vec{H}_n$  и  $\vec{H}$  от  $y$ , можно представить уравнение (1.23) в виде

$$\vec{H}(t) = \frac{\vec{B}(t)}{\mu_0} + \frac{d\vec{i}_{\text{пов}}(t)}{dz}, \quad (1.26)$$

где  $\vec{i}_{\text{пов}}(t)$  и есть упомянутый ток, обтекающий боковую поверхность образца<sup>1)</sup>. Понятно теперь, что если и соглашаться с предположением  $\vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ , то хоть не для всех точек образца. По крайней мере на самой поверхности учитывать вихревое электрическое поле совершенно необходимо.

Таким образом очередной задачей является установление природы поверхностного тока и расчет его величины<sup>2)</sup>.

Представим себе образец состоящим из множества слоев "одноэлектронной толщины" (слой не может быть тоньше), перпендикулярных оси  $Z$ . Число таких слоев на единицу длины равно линейной плотности электронов. Так как число ( $N$ ) электронов, однородно распределенных в кубике с ребром  $s$ , можно представить в виде  $(N^{1/3})^3$ , легко связать линейную плотность ( $n_{\text{лин}}$ ) с объемной ( $n$ ):

$$n_{\text{лин}} = \frac{n^{1/3}}{s} = \left(\frac{N}{s^3}\right)^{1/3} = n^{1/3}.$$

Теперь можно написать:

$$\frac{d\vec{i}_{\text{пов}}(t)}{dz} = \vec{i}_1(t) \cdot n^{1/3}, \quad (1.27)$$

где  $\vec{i}_1$  — ток, обтекающий боковую поверхность "одноэлектронного" слоя.

Вычисление тока  $\vec{i}_1$  требует дополнительных сведений о внутреннем строении образца. Поэтому допустим, что:

1) Соотношение (1.25) записано в предположении, что ток обтекает боковую поверхность образца по часовой стрелке, если смотреть на  $XY$  сечение образца со стороны положительной полуоси  $Z$ . Поверхностный ток является аксиальным вектором, который в рассматриваемом примере направлен противоположно вектору  $\vec{B}$ .

2) Заметим, что знание величины и направления тока необходимо для формулировки не уравнения, а граничного условия. Непосредственно из уравнений (1.23), (1.24) смотреть причину возникновения диамагнитной реакции нельзя, она "скрыта" в граничном условии

1. Каждый из  $N$  электронов образца до включения поля магнитного вращался в центральном силовом поле по орбите радиуса  $R_i$  с частотой  $\vec{\omega}_{0,i}$  и орбитальной скоростью  $\vec{V}_{0,i}$  ( $1 \leq i \leq N$ ), вследствие чего в исходном состоянии имело место равенство сил — силы  $\frac{Q}{R_i^2}$  со стороны центрального поля ( $Q$  — некоторая константа) и силы центробежной инерции ( $m \cdot \omega_{0,i}^2 \cdot R_i$ ):

$$\frac{Q}{R_i^2} = m \cdot \omega_{0,i}^2 \cdot R_i; \quad (1.28)$$

2. В процессе включения магнитного поля радиус орбиты остается постоянным ( $\frac{dR_i}{dt} = 0$ );

3. Пространственно однородное поле  $\vec{H}$ , возрастая во времени, остается слабым.

Заметим, что введенное нами центральное силовое поле может меняться со временем (в точке нахождения электрона) лишь из-за изменения радиуса:

$$\frac{d\vec{E}_{\text{сил}}}{dt} = \frac{\partial \vec{E}_{\text{сил}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}_{\text{сил}}}{\partial R_i} \cdot \frac{dR_i}{dt} = 0 + \frac{\partial \vec{E}_{\text{сил}}}{\partial R_i} \cdot \frac{dR_i}{dt}.$$

Второе предположение ( $\frac{dR_i}{dt} = 0$ ) означает, что  $\frac{d\vec{E}_{\text{сил}}}{dt} = 0$ .

Следовательно, если мы сумеем обосновать независимость  $R_i$  от  $\vec{H}$ , то тем самым сумеем обосновать и предположение (1.17).

Что касается критерия слабости поля  $\vec{H}$ , он будет приведен в конце расчета.

На рис. 1.2 представлено положение орбиты электрона в однородном поле, в котором  $A_x(y, t) = -H_z(t) \cdot y(t)$  (далее индексы “x” и “z” снимем). Чтобы придать примеру некоторую экзотичность, исходное направление вращения выбрано по часовой стрелке, из-за чего сила Лоренца оказывается **центробежной**.

Найдем для представленного на рис. 1.2 примера среднеорбитальную скорость  $V_{\text{сред}}$  на момент  $t$  после начала включения, считая, что за время одного оборота ( $\tau$ ) поле не успевает измениться заметно.

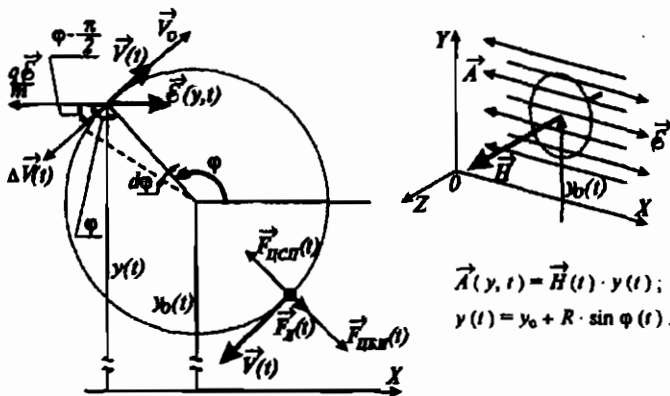


Рис. 1.2. Вращение электрона по круговой орбите по часовой стрелке:

$y_0$  —  $y$ -координата центра орбиты;  $y(t)$  — текущее (мгновенное) значение  $y$ -координаты электрона;  $\vec{V}_0$  — вектор исходной скорости электрона;  $\vec{V}(t)$  — вектор скорости в момент  $t$ ;  $\Delta\vec{V}(t)$  — изменение скорости, накопленное к моменту  $t$  за счет действия вихревого поля  $\vec{E}$ ;  $\vec{F}_{\text{исп}}(t)$ ,  $\vec{F}_{\text{убн}}(t)$ ,  $\vec{F}_n(t)$  — силы в момент  $t$ : со стороны центрального (силового) поля, центробежной инерции, Лоренца. В стационарном состоянии  $\vec{F}_{\text{исп}} = \vec{F}_{\text{убн}} + \vec{F}_n$ .

Как видно из рис. 1.2, при выбранных направлениях вращения и магнитного поля торможение электрона происходит в более сильном вихревом поле, чем ускорение. Поэтому с течением времени средне-орбитальная скорость уменьшается. Не прибегая пока к использованию векторов, запишем:

$$\tau = \frac{2\pi R}{V_{\text{сред}}(t)}$$

$$\int_0^{\tau} [V_0 - \Delta V(t)] \cdot dt = 2\pi R. \quad (1.29)$$

Как следует из рис. 1.2,

$$\Delta V(t) = \frac{|q| \cdot \mu_0 \cdot H(t)}{m} \cdot (R \cdot \sin\varphi + y_0) \cdot \sin\varphi, \quad (1.30)$$

где  $y_0$  —  $y$ -координата центра орбиты;

$$dt = \frac{R \cdot d\varphi}{V_{\text{сред}}(t)}. \quad (1.31)$$



Подставляя (1.30) и (1.31) в (1.29), получим

$$\int_0^{2\pi} \left[ V_0 - \frac{|q| \cdot \mu_0 \cdot H(t)}{m} \cdot (R \cdot \sin\phi + y_0) \cdot \sin\phi \right] \cdot \frac{R \cdot d\phi}{V_{\text{сред}}(t)} = 2\pi R,$$

откуда:

$$V_{\text{сред}}(t) = V_0 - \Delta V(t), \quad (1.32)$$

$$\Delta V(t) = \Delta\omega(t) \cdot R \quad (1.33)$$

$$\Delta\omega(t) = \frac{|q| \cdot \mu_0 \cdot H(t)}{2m}. \quad (1.34)$$

Проверим теперь, в какой степени полученный результат соответствует предположению о неизменности радиуса орбиты.

До включения магнитного поля имело место равенство (1.28).

Теперь необходимо проверить, существует ли равенство

$$m \cdot (\omega_0 - \Delta\omega)^2 \cdot R + |q| \cdot \mu_0 \cdot (V_0 - \Delta V) \cdot H = m \cdot \omega_0^2 \cdot R. \quad (1.35)$$

В левой части — сумма центробежных сил, в правой — центростремительная сила со стороны поля  $\vec{E}_{\text{сил}}$ . Подставляя в (1.35) выражения (1.33, 1.34), получаем

$$m \cdot \omega_0^2 \cdot R - \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot R}{4m} \cdot H^2(t) \neq m \cdot \omega_0^2 \cdot R. \quad (1.36)$$

Знак “+” приписан: в левой части центробежным силам, а в правой — центростремительным.

Из (1.36) очевидно, что “остаточная” сила

$$\delta F(t) = \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot R}{4m} \cdot H^2(t) \neq 0 \quad (1.37)$$

и направлена к центру (в нашем примере на рис. 1.2). Конечно, этот остаток на самом деле должен быть скомпенсирован изменением силы со стороны центрального поля. Соответствующее этому изменению силы изменение радиуса найдем из (1.28):

$$\frac{\delta R}{R_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta F_{\text{сил}}}{F_{\text{сил}}}, \quad (1.38)$$

где  $F_{\text{сил}} = \frac{Q}{R_0^2}$ , а  $R_0$  — значение радиуса до включения магнитного поля.

С учетом (1.38) и (1.28)

$$\delta F_{\text{сил}}(t) = 2m \cdot \omega_0^2 \cdot \delta R(t). \quad (1.39)$$

Выражение (1.37) преобразуем, полагая  $R(t) = R_0 + \delta R(t)$ :

$$\delta F(t) = \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot [R_0 + \delta R(t)] \cdot H^2(t)}{4m}. \quad (1.40)$$

Считая поле  $H(t)$  настолько слабым, что даже его стационарное значение

$$H^2 \ll \left( \frac{2m \cdot \omega_{0,i}}{|q| \cdot \mu_0} \right)^2 \quad (1.41)$$

для любого ( $i$ -го) электрона, приравняем (1.39) и (1.40), после чего получим:

$$\frac{\delta R(t)}{R_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{q \cdot \mu_0 \cdot H(t)}{2m \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{q \cdot \mu_0 \cdot H(t)}{2m \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right]^{-1}.$$

Тогда, если справедливо неравенство (1.41), то и неравенство

$$\frac{\delta R(t)}{R_0} \ll 1$$

сохраняется в течение всего процесса включения.

Если иметь ввиду частоты вращения тех электронов, которые реально участвуют в диамагнитной реакции ( $\omega_0 \geq 10^{13}$  Гц), то слабым оказывается поле напряженностью

$$H \ll 10^7 \frac{\text{А}}{\text{см}}.$$

Значению  $10^7 \frac{\text{А}}{\text{см}}$  отвечает индукция внутри соленоида  $\approx 10^6$  Гс (100 Т) — огромная величина с точки зрения техники даже далекого будущего.

Подведем итог.

В процессе включения пространственно однородного магнитного поля реакция электрона, исходно вращающегося по орбите

радиуса  $R_0$  с частотой  $\omega_0$ , состоит лишь в изменении частоты на величину

$$\Delta\vec{\omega}(t) = -\frac{q \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(t)}{2m}, \quad (1.42)$$

если существенное возрастание поля  $\vec{H}$  происходит за интервал времени гораздо больший, чем период обращения  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ , и если поле  $\vec{H}$  остается слабым. При этих условиях допустимо считать, что  $\frac{dR(t)}{dt} = 0$ , а тем самым, что справедливо равенство (1.17).

### 1.1.3. Применимость полученных результатов на случай массивного образца

Образец будем считать массивным, если размер  $2l$  (см. рис. 1.1) очень велик по сравнению с радиусом любой орбиты.

Выделим внутри такого образца объем  $\Delta v$  ( $\vec{r}$ ) настолько большой, чтобы он вмещал много одноэлектронных орбит, но очень малый по сравнению с размерами образца. Поскольку радиус орбиты не зависит от магнитного поля, число электронов, постоянно вращающихся внутри  $\Delta v$ , остается неизменным в процессе включения.

Далее, если мы проведем внутри объема  $\Delta v$  ( $\vec{r}$ ) (вдали от его границ) небольшой контур, то увидим, что абсолютная величина суммы векторов скоростей частиц, оказавшихся в момент наблюдения внутри контура, гораздо меньше абсолютной величины любого из векторов (рис. 1.3). Эта картина призвана показать, что, если плотность результирующего тока (множества электронов) вдали от границ объема обоснованно считалось раной нулю до включения магнитного поля, ее и в процессе включения следует считать такой же.

Подчеркнем, что существенным для подобного утверждения является разброс центров орбит внутри любого объема  $\Delta v$  ( $\vec{r}$ ), а, следовательно, и повсюду внутри образца.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Разброс центров орбит представляется самоочевидным, если речь идет об электронах атомов, образующих протяженный образец. Что касается электронов проводимости металла, см. п. 1.2.3 и §1.3.

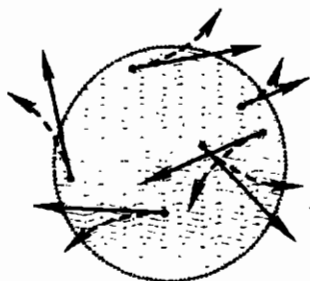


Рис. 1.3. Одноэлектронные орбитальные токи шести электронов, оказавшихся в момент  $t$  внутри заштрихованного круга, расположенного очень далеко от поверхности.

Сумма всех шести векторов скоростей исчезающе мала, хотя каждый вектор в отдельности велик

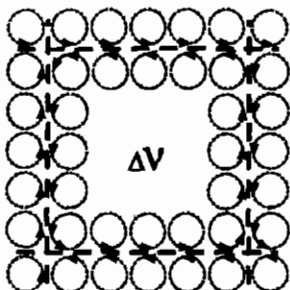


Рис. 1.4. Орбитальные токи у границ объемов.

Вдоль границы объема  $\Delta v$  течет вихревой ток, "сшитый" из "кусков" орбитальных одноэлектронных токов (предполагается, что все электроны вращаются в одну сторону). Видно, что у границ соседних объемов вихревые токи равны по величине, но противоположны по направлению. Поэтому результирующий ток вдоль границы объема  $\Delta v$  равен нулю

Теперь обратим внимание на то, что вдоль поверхности, ограничивающей объем  $\Delta v$  ( $\vec{r}$ ), как следует из рис. 1.4, явно течет вихревой ток, образованный из кусков одноэлектронных орбит. Поскольку подобная картина имеет место и до включения магнитного поля, это кажется ложным эффектом, ибо вихревые токи у границ соседних объемов компенсируют друг друга. Однако никакой компенсации не может быть у поверхности образца. Конечно, не должно получаться так, чтобы в отсутствие всякого внешнего возмущения поверхность образца обтекал электрический ток. Поэтому нужно предположить (и это, разумеется, логично), что в исходном состоянии в объеме  $\Delta v$  ( $\vec{r}$ ) для каждого электрона, вращающегося по орбите радиуса  $R_0$  против часовой стрелки с орбитальной скоростью  $V_0$ , найдется партнер, вращающийся по орбите также радиуса  $R_0$  со скоростью  $V_0$  по часовой стрелке.

Как следует из рис. 1.3, вне зависимости от того, присутствуют ли внутри образца (вдали от поверхности) во всех элементарных объемах электроны, вращающиеся только в одном направлении или еще и в противоположном, плотность тока  $\vec{j}$  как до, так и в процессе включе-

ния поля повсюду внутри образца остается равной нулю. Поэтому магнитное поле внутри образца не зависит от координат.

По сути дела, мы обнаружили самосогласованность двух предположений: что все электроны образца еще до включения поля вращаются по орбитам, центры которых однородно распределены по образцу, и что поле внутри в образце является пространственно однородным.

Остается последнее: увидеть, как именно возникает диамагнитный ток.

Рассмотрим приповерхностный слой, ширина которого примерно равна радиусу "средней" электронной орбиты (рис. 1.5). Как следует из (1.42), частоты "по" и "против" вращающихся электронов вне зависимости от начальных значений частот и радиусов меняются на одну и ту же величину

$$\Delta\vec{\omega}(t) = -\frac{q \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(t)}{2m}.$$

Следовательно, два партнера (рис. 1.5) создают у самой поверхности вихревой электронный ток

$$\begin{aligned} \vec{i}(t) &= [q \cdot \vec{\omega}_{\text{по}}(t) + q \cdot \vec{\omega}_{\text{против}}(t)] = \\ &= q \cdot \left( -\frac{q \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(t)}{m} \right) = -\frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(t)}{m}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

"Сшитый" из кусков одноэлектронных орбит, этот ток обтекает "поверхность" в слое, толщина которого вдоль  $Y$ -оси весьма мала.

Возвращаясь к уравнению (1.27), видим, что

$$\vec{i}_1(t) = -\frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(t)}{m}, \quad (1.44)$$

после чего уравнение (1.26) может быть представлено в форме

$$\vec{H}(t) = \frac{\vec{B}(t)}{\mu_0} - \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{m} \cdot \vec{H}(t). \quad (1.45)$$

Отсюда

$$\vec{H}(t) = \frac{\vec{B}(t)}{\mu_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{m}}. \quad (1.46)$$

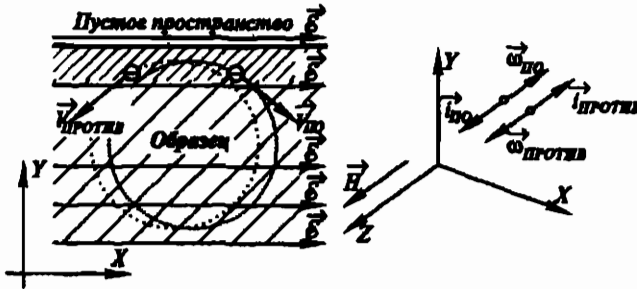


Рис. 1.5. Ситуация у поверхности.

Среднеорбитальная скорость электрона, вращающегося против часовой стрелки, с течением времени увеличивается, а электрона, вращающегося по часовой стрелке, уменьшается

### Величина

$$\left(1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{m}\right)^{-1} = \mu \quad (1.47)$$

получила название относительной магнитной проницаемости<sup>1)</sup> и, как видно, для диамагнетика  $\mu < 1$ . Подчеркнем абсурдность надежд на идеальный диамагнетизм, если понимать под этим возможность реализовать неравенство  $\mu \ll 1$ . Для реального вещества  $n = 10^{23} \text{ см}^{-3}$ , чему отвечает  $\mu = (1 - 10^{-7}) = 1$ .

Подведем итог.

Орбитальное вращение всех электронов и разброс центров их орбит по всему объему образца приводят к слабой диамагнитной реакции, которая состоит в возникновении чисто поверхностного вихревого

1) Так как  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \vec{H}_n$ , выражение для  $\vec{H}_n$  приобретает вид

$$\vec{H}_n(t) = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \left( -\frac{\frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{m}}{1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{m}} \right)$$

Величина в скобках обозначается  $\chi$  и называется магнитной восприимчивостью. Как видим, для диамагнетика  $\chi < 0$ .

тока, вследствие чего сохраняется пространственная однородность магнитного поля и внутри образца.

#### 1.1.4. Свободно движущиеся электроны в пространственно однородном магнитном поле (диамагнетизм Ландау)

Рассмотрим гипотетический, но поучительный пример. Пусть до включения магнитного поля все электроны движутся внутри образца во всевозможных направлениях прямолинейно и равномерно. Разумно предположить, что в этом случае ток, протекающий внутри образца через любую не бесконечно малую площадку, равен нулю.

Начнем включать внешнее (однородное и слабое) магнитное поле в соответствии с примером, показанным на рис. 1.1.

Обратимся к уравнению (1.8). Совершенно очевидно, что для ускорения, испытываемого электроном, скорость которого в исходном состоянии была отличной от нуля ( $\vec{V}_i(t \leq 0) \equiv \vec{V}_{0,i} \neq 0$ ), нужно написать соотношение

$$\frac{d\vec{V}_i(t)}{dt} = \frac{q}{m} \left\{ \vec{E}(\vec{r}, t) + \mu_0 [\vec{V}_i(t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] \right\}.$$

В этом соотношении в правой части оставлены лишь два слагаемых, так как:

а) в соответствии с предложением о равномерном и прямолинейном движении электронов еще в исходном состоянии необходимо считать, что  $t \rightarrow \infty$  <sup>1)</sup>;

б) в отсутствии тока, как хорошо известно, эффект Холла не возникает, ибо не происходит преимущественного отклонения электронов в одном определенном направлении, а потому  $\vec{E}_{\text{хол}} = 0$ .

Итак совершенно очевидно, что траектория каждого электрона в процессе включения магнитного поля начнет искривляться под действием силы Лоренца так, что все электроны будут проявлять тенденцию к вращению в одном направлении. Поэтому каждый из них будет ускоряться в вихревом электрическом поле большей напряженности, а тормозиться в поле меньшей напряженности (рис. 1.6).

Когда наступит стационарное состояние, непрерывно изменявшиеся радиусы кривизны траекторий превратятся в радиусы круговых орбит.

<sup>1)</sup> См. сноску 1 на с. 8.

Поддерживать же вращение будет равновесие двух сил — Лоренца и центробежной инерции:

$$q \cdot \mu_0 \cdot \vec{V}(t) \times \vec{H} = m \cdot \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{R}(t)].$$

Так как  $\vec{V} = \vec{R} \times \vec{\omega}$ , стационарное значение частоты вращения каждого электрона одинаково и равно

$$\vec{\omega} = - \frac{q \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}}{m}. \tag{1.48}$$

Стоит прервать изложение, чтобы обратить внимание на возможность сделать существенные выводы:

1. Какой бы не была скорость электрона до включения поля (хотя бы и равной нулю), в процессе включения ее абсолютное значение возрастет;
2. В стационарном состоянии в присутствии магнитного поля все электроны вращаются по орбитам;
3. Если учесть однородное распределение в пространстве местоположений электронов перед включением поля, очевидно, что к концу процесса включения центры всех орбит будут однородно распределены по всему образцу (в  $xy$ -сечении, отвечающем любой  $z$ -координате).

Из п. 1 следует, что реакция именно диамагнитная. Из сопоставления п. 2 и 3 следует, что магнитное поле внутри образца — однородное и, стало быть, диамагнитная реакция — слабая.

Вернемся к прерванному изложению. Уже ясно, что принципиально необходимо рассмотреть движение электронов только у поверх-

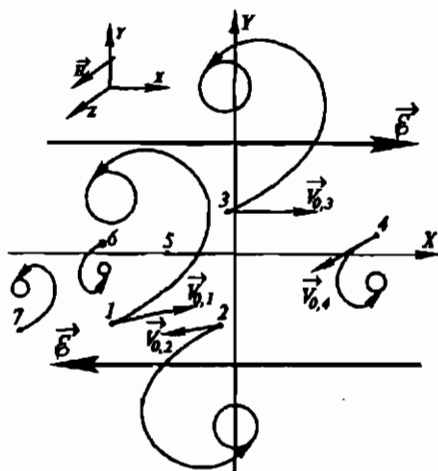


Рис. 1.6. Движение электронов в  $xy$ -сечении образца под действием вихревого электрического поля и силы Лоренца:

$\vec{V}_{0,i}$  — скорости в “момент” включения магнитного поля. Электроны 5, 6, 7 в тот момент покоились



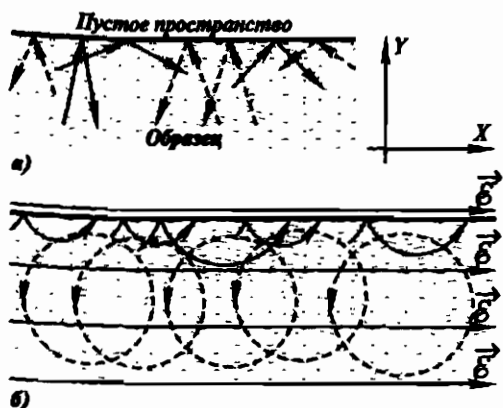


Рис. 1.7. Движение электронов у поверхности:

а — до включения магнитного поля; б — в процессе включения магнитного поля. Те электроны, что отражаются от поверхности и движутся в “антидиамагнитном” направлении (сплошные линии), оказываются в наиболее сильном вихревом электрическом поле, которое для них является тормозящим

ности. На рис. 1.7 показано, как выглядит поведение электронов у самой поверхности образца хоть и очень большого, но все же конечной протяженности вдоль оси  $Y$ . На рис. 1.7, а представлена ситуация до включения поля. Если учесть существование партнеров с равными по величине и антипараллельными скоростями, то, естественно, не возникает результирующего тока вдоль поверхности.

В магнитном поле ситуация существенно изменяется. Электроны, скользившие, так сказать, в требуемом для диамагнитной реакции направлении еще в исходном состоянии, теперь под действием силы Лоренца отойдут от поверхности (рис. 1.7, б) и начнут вращаться по орбитам, каждый с частотой

$$\vec{\omega}_{\text{диа}}(t) = -\frac{q \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(t)}{m}.$$

Они-то, конечно, создают диамагнитный ток<sup>1)</sup>, величина которого в сечении слоя одноэлектронной толщины равна

$$\vec{i}_{\text{диа},1}(t) = q \cdot \vec{\omega}_{\text{диа}}(t) = -\frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(t)}{m}.$$

Что же касается электронов, скользивших в исходном состоянии в антидиамагнитном направлении, то в процессе включения поля они будут еще ближе “прижиматься” к поверхности силой Лоренца. Поэ-

1) “Сшитый” из кусков одноэлектронных орбит

тому на протяжении всего процесса они будут только тормозиться, причем в самом сильном вихревом электрическом поле.  $x$ -компонента их скорости, направленная ранее в положительную сторону оси  $X$ , будет меняться во времени по закону

$$V_{x, l, \text{антидипа}}(t) = V_{x, l, 0} - \frac{|q| \cdot \mu_0 \cdot H(t) \cdot l}{m}.$$

Здесь придется еще раз прервать изложение, чтобы обратить внимание на необходимость согласовать величину протяженности образца вдоль оси  $Y$  (размер  $2l$ ) с предположением о характере движения электронов, сделанном в самом начале параграфа.

Если было решено, что в исходном состоянии электроны движутся равномерно и прямолинейно, мы должны позаботиться, чтобы их орбиты в магнитном поле вписались в сечение образца. Если не ограничивать заранее величины начальных скоростей и тем самым радиусов орбит, необходимо не ограничивать размер  $l$ .

Будем считать массивным образец столь большого размера  $l$ , чтобы для любого заданного значения  $V_{x, l, 0}$  вихревое поле с течением времени могло уменьшить скорость  $V_{x, l, \text{антидипа}}$  до нуля<sup>1)</sup>.

Как только это произойдет, электрон начнет вращаться в диамагнитном направлении, отойдя от поверхности. Таким образом, потребовав (в "запас прочности") неограниченного увеличения размера  $l$ , можно полагать, что еще задолго до окончания этапа включения в поверхностном токе будет присутствовать только диамагнитная составляющая, и тогда:

$$\vec{i}_1(t) = - \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(t)}{m}. \quad (1.49)$$

Это выражение в точности совпадает с (1.44), что подтверждает важный вывод об одинаковости диамагнитной реакции как коллектива первоначально вращающихся, так и прямолинейно движущихся электронов.

<sup>1)</sup> Имеется в виду, что хотя бы незадолго до окончания этапа включения

$$\left( V_{x, l, 0} - \frac{|q| \cdot \mu_0 \cdot l}{m} \cdot H \right) = 0.$$

### 1.1.5. Диамагнитная реакция нормального металла

В предыдущем параграфе мы рассмотрели две модели вещества, приводящие к слабой диамагнитной реакции. Теперь надо выяснить, соответствует ли нормальный металл какой-нибудь из них. На первый взгляд модель с исходно вращающимися электронами неплохо согласуется с поведением электронов в реальном металле. В отсутствие внешнего возмущения все те электроны, которые способны впоследствии внести вклад в ток, хотя и движутся по “прямым” линиям с огромными скоростями ( $\approx 10^8$  см/с), но чрезвычайно часто сталкиваются с дефектами ( $\approx 10^{13}$  столкновений/с). Поэтому можно представить себе, что каждый электрон описывает (в проекции на любую плоскость) замкнутую ломаную линию (рис. 1.8) — “орбиту” и приписать ей радиус  $\approx 10^8/10^{13} = 10^{-5}$  см.<sup>1)</sup>

Естественно, что хаотическое распределение дефектов внутри образца предопределяет однородное распределение центров орбит. Заметим также, что в слабом магнитном поле искривление ломаных линий под действием силы Лоренца было бы ничтожным<sup>2)</sup>, и это позволяет нам полагать, что такое магнитное поле не влияет на форму и размеры орбиты.

Итак, есть, по-видимому, все основания ожидать от электронов проводимости той слабой диамагнитной реакции, которая была описана в §1.3.

Но вот что происходит на этапе включения поля магнитного, когда во всем образце существует вихревое электрическое поле. Оно вынуждает электроны дрейфовать, ибо центры их “орбит” никакими силами не фиксированы в точках образца. Именно в этом резкое отличие от модели электронов, вращающихся в центральных полях (например, атомов).

Силовые линии вихревого электрического поля распространяются на весь образец, и характер дрейфа электронов в этом поле точно такой же, как в потенциальном. Учитывая, что каждый электрон в исходном состоянии двигался под действием дефектов по “орбите” и

---

1) Учитывая неразличимость электронов, можно, по крайней мере, согласиться с тем, что какой-нибудь из них постоянно присутствует на орбите.

2) В очень сильном поле электрон действительно вращался бы по круговой орбите, но радиус ее был бы гораздо меньше длины ломаной, изображенной на рис. 1.8.

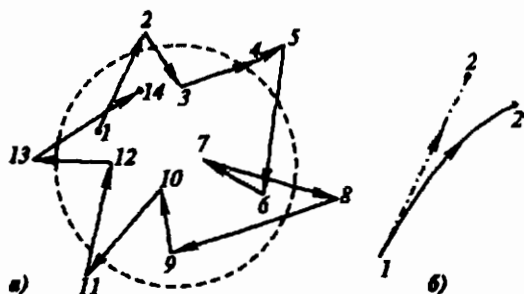


Рис. 1.8. Движение электрона в присутствии дефектов:

*а* — до включения магнитного поля. Участок траектории от точки 1 до точки 14 обозначен сплошной ломаной линией. Штриховая окружность символизирует “эквивалентную” орбиту;

*б* — в очень слабом магнитном поле. Штрих-пунктирная линия 1–2 представляет в увеличенном масштабе линию 1–2 на рис. *а*). Сплошная искривленная линия 1–2’ (дуга огромного радиуса) символизирует истинную траекторию электрона в магнитном поле

его средняя скорость равнялась нулю,<sup>1)</sup> в вихревом поле каждый электрон приобретает к моменту  $t$  (после включения) одинаковую скорость дрейфа ( $\vec{V}_{др}$ ) — скорость перемещения только вдоль линий вихревого поля  $\vec{E}$ .<sup>2)</sup>

Если бы не присутствие дефектов, имело бы место равенство

$$\vec{V}_{др}(\vec{r}, t) = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot t.$$

Поскольку же дефекты оказывают тормозящее действие, напишем

$$\frac{\partial \vec{V}_{др}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{\vec{V}_{др}(\vec{r}, t)}{\tau_{\sigma}},$$

где  $\tau_{\sigma}$  — хорошо известное время релаксации электропроводности.

1) За промежутки времени гораздо больший, чем транспортное время “свободного” пробега.

2) Принципиально важно, что вследствие рассеяния на дефектах средняя скорость каждого из электронов, способных участвовать в токе, одинакова: равна нулю до включения поля и равна  $\vec{V}_{др}(t)$  в присутствии поля  $\vec{E}(t)$  (см. гл. 2).

Обратимся теперь к уравнениям (1.8), (1.10), (1.11). Заметим, что, поскольку концентрация свободных электронов проводимости в металле очень велика ( $n_0 = 10^{23} \text{ см}^{-3}$ ), очень малы константы  $\tau_{\text{максв}}$  и  $R_{\text{экв}}$ , характеризующие темп изменения во времени и быстроту изменения в пространстве потенциального холловского поля, вызванного нарушением электронейтральности:

$$\tau_{\text{максв}} \approx 10^{-19} \text{ с} \quad \text{при } T = 300 \text{ К}; \quad R_{\text{экв}} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

В таком случае, если достаточно медленно включать однородное внешнее магнитное поле, можно считать, что внутри образца сила Лоренца синхронно уравновешивается силой со стороны холловского поля. Кроме того из приведенных оценок следует, что нарушение электронейтральности вообще может быть лишь очень незначительным:

$$(n(\vec{r}, t) - n_0) \ll n_0.$$

В итоге можно допустить, что

$$\mu_0 \cdot [\vec{V}_{\text{др}}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] + \vec{E}_{\text{хол}}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.50, a)$$

$$n(\vec{r}, t) = n_0 = \text{const.} \quad (1.50, б)$$

Таким образом уравнение (1.11) редуцируется к виду

$$\frac{d\vec{V}_{\text{др}}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{\vec{V}_{\text{др}}(\vec{r}, t)}{\tau_{\sigma}}. \quad (1.51)$$

Умножая обе части уравнения (1.51) на  $(q \cdot n_0)$ , получаем:

$$\frac{d\vec{J}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{q^2 \cdot n_0}{m} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{\vec{J}(\vec{r}, t)}{\tau_{\sigma}}. \quad (1.52)$$

Подчеркнем, что в этом уравнении  $\vec{J}$  есть плотность "макроскопического" и притом чисто вихревого тока, текущего в  $xy$ -сечении образца вдоль очень протяженных силовых линий вихревого поля  $\vec{E}$ . По-видимому вполне целесообразно употребить термин "макроскопический", чтобы отличить упомянутый ток от орбитального одно-электронного вихревого тока, длина линии которого совпадает с длиной орбиты и потому микроскопически мала.

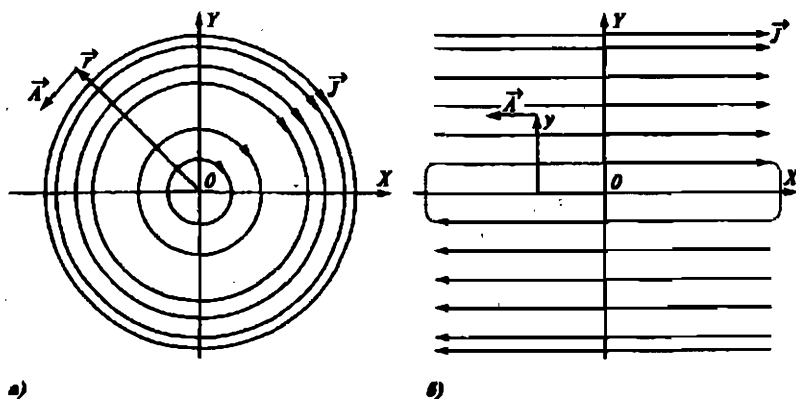


Рис. 1.9. Макроскопические вихревые токи в  $xy$ -сечении образца:

$a$  — в случае, когда  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{r}$ ;  $b$  — в случае, когда  $A_x = -H \cdot y$

Особо подчеркнем, что из уравнения (1.52) следует затухание “макроскопических” вихревых токов, как только процесс включения магнитного поля закончится и исчезнет вихревое электрическое поле (инициировавшее и поддерживавшее эти токи). Отсюда важный вывод: нельзя пренебрегать диамагнитной реакцией за счет “орбитального” движения электронов металла, ибо только такая реакция выживет к концу процесса включения.

Тем не менее мы сейчас убедимся, что гораздо сильнее диамагнитная реакция, обусловленная макроскопическими вихревыми токами, протекающими не только вдоль поверхности, но и во всем сечении образца (рис. 1.9). “Гораздо сильнее” означает, что магнитное поле внутри образца (в глубине сечения) оказывается гораздо меньшим, чем в случае реакции за счет “орбитального” движения.

Как уже подчеркивалось, диамагнитная реакция, обусловленная “макроскопическими” токами, исчезает к концу процесса включения. Поэтому рассмотрим случай, когда магнитное поле непрерывно колеблется, например, по гармоническому закону:

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi \cdot t}{\tau_0}}$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\tau_0$  — период колебаний плотности внешнего магнитного потока.

Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.53)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{\tau_0}} + \vec{H}_H(\vec{r}, t), \quad (1.54)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_H(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\sigma \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) - \vec{J}(\vec{r}, t)}{\tau_\sigma}, \quad (1.56)$$

где  $\sigma \equiv \frac{q^2 \cdot n_0 \cdot \tau_\sigma}{m}$  — удельная электропроводность металла;  $\vec{E}$  — чисто вихревое электрическое поле.

Уравнение (1.56) получается из (1.52) при использовании подстановки

$$\frac{q^2 \cdot n}{m} = \frac{\sigma}{\tau_\sigma}.$$

Разрешив систему уравнений относительно величин  $\vec{H}$  и  $\vec{J}$ , получаем

$$\begin{aligned} & -\lambda^2 \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left( \vec{W} + \tau_\sigma \cdot \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right) = \\ & = \tau_\sigma \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{W} + \tau_{\text{пл}}^2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial t^2} + \frac{\tau_{\text{пл}}^2}{\tau_\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Здесь  $\lambda^2 \equiv m / (q^2 \cdot n_0 \cdot \mu_0)$ ;  $\tau_{\text{пл}}^2 \equiv \lambda^2 / c^2 = (m \cdot \varepsilon_0) / (q^2 \cdot n_0)^{11}$ ; вектор  $\vec{W}$  символизирует как  $\vec{H}$ , так и  $\vec{J}$ , ибо уравнение (1.57) оказывается одинакового вида для обеих величин;  $c$  — скорость света.

1) Величина  $(q^2 \cdot n_0 / m \cdot \varepsilon_0)^{1/2} \cdot 2\pi \equiv \omega_{\text{пл}}$  — называется плазменной частотой. Отсюда обозначение  $2\pi / \omega_{\text{пл}} = \tau_{\text{пл}}$ .

Ради удобства перейдем к безразмерным координатам и времени:

$$x \equiv \frac{x}{\lambda}; \quad y \equiv \frac{y}{\lambda}; \quad z \equiv \frac{z}{\lambda}; \quad t \equiv \frac{t}{\tau_{пл}},$$

после чего получаем:

$$\begin{aligned} & - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left( \vec{W} + \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{пл}} \cdot \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right) = \\ & = \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{пл}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{W} + \frac{\tau_{пл}}{\tau_{\sigma}} \cdot \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial t^2} \right), \end{aligned} \quad (1.58)$$

где  $\vec{W} \equiv \vec{W}(x, y, z, t)$ , причем  $\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot \exp(i \cdot 2\pi \frac{\tau_{пл}}{\tau_0} \cdot t)$ .

Поскольку обычно  $\tau_{пл} \approx 10^{-16}$  с,  $\tau_{\sigma} \geq 10^{-13}$  с, то, полагая  $\tau_0 \geq 10^{-11}$  с,<sup>1)</sup> имеем систему неравенств:

$$\tau_{пл} \ll \tau_{\sigma} \ll \tau_0. \quad (1.59)$$

Неравенство  $\tau_{\sigma} \ll \tau_0$  позволяет считать, что связь между  $\vec{J}$  и  $\vec{E}$  в виде  $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$  (закон Ома) устанавливается гораздо быстрее, чем происходит заметное изменение поля  $\vec{E}$ . Тогда в левой части уравнения (1.58) можно пренебречь слагаемым  $\frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{пл}} \cdot \frac{\partial \vec{W}}{\partial t}$ , которое — по

рядука  $\frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{пл}} \cdot \left( \vec{W} \cdot \frac{\tau_{пл}}{\tau_0} \right) = \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_0} \cdot \vec{W}$ . Из (1.59) следует, что  $\frac{\tau_{\sigma}}{\tau_0} \cdot \vec{W} \ll \vec{W}$ .

Поскольку из (1.59) следует также, что  $\frac{\tau_{пл}}{\tau_0} \ll 1 \ll \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{пл}}$ , автоматически удовлетворяется неравенство

$$\frac{\tau_{пл}}{\tau_0} \ll \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{пл}}$$

или, что то же самое

$$\frac{\tau_{пл}^2}{\tau_0 \cdot \tau_{\sigma}} \ll 1. \quad (1.60)$$

1) Периоду  $10^{-11}$  с отвечает длина волны электромагнитных колебаний 3 мм, соответствующая диапазону СВЧ.



В этом случае можно пренебречь амплитудой тока смещения по сравнению с амплитудой тока проводимости и отбросить в правой части (1.58) два слагаемых:

$$\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\tau_{\text{пл}}}{\tau_{\sigma}} \cdot \frac{\partial \vec{W}}{\partial t}$$

(последнее примерно равно  $\frac{\tau_{\text{пл}}}{\tau_{\sigma}} \cdot \left( \vec{W} \cdot \frac{\tau_{\text{пл}}}{\tau_{\sigma}} \right) = \frac{\tau_{\text{пл}}^2}{\tau_{\sigma} \cdot \tau_{\sigma}} \cdot \vec{W} \ll \vec{W}$ ).

Таким образом, уравнение (1.58) сильно упрощается и переходит в уравнение

$$\frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{\text{пл}}} \cdot \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \text{rot rot } \vec{W} = 0. \quad (1.61)$$

Это хорошо известное уравнение, описывающее скин-эффект. Заменяя  $\vec{W}$  на  $\vec{H}$ , получаем:

$$\frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{\text{пл}}} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot rot } \vec{H} = 0. \quad (1.62)$$

Преобразуем это уравнение применительно к примеру на рис. 1.1:

$$\frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{\text{пл}}} \cdot \frac{\partial \vec{H}(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{H}(\mathbf{Y}, t)}{\partial \mathbf{Y}^2} = 0. \quad (1.63)$$

Граничные условия имеют вид:

$$H\left(\mathbf{Y} = \frac{l}{\lambda}, t\right) = H\left(\mathbf{Y} = -\frac{l}{\lambda}, t\right) = \frac{B_0}{\mu_0} \cdot e^{2\pi \cdot i \cdot \frac{\tau_{\text{пл}}}{\tau_{\sigma}} \cdot t}. \quad (1.64)$$

Будем искать решение уравнения (1.63) в виде

$$H(\mathbf{Y}, t) = f(\mathbf{Y}) \cdot \exp\left(2\pi \cdot i \cdot \frac{\tau_{\text{пл}}}{\tau_{\sigma}} \cdot t\right), \quad (1.65)$$

после чего остается найти функцию  $f(\mathbf{Y})$ .

Опуская ход решения, приведем результат, возвращаясь к обычным координатам и времени:

$$H(y, t) = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{e^{\gamma \lambda_1} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{y}{\lambda_2} + \frac{t}{\tau_0} \right) - e^{-\gamma \lambda_1} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau_0} \right)}{2 \operatorname{ch} \frac{l}{\lambda_1}}, \quad (1.66)$$

где

$$\lambda_1 = \lambda \sqrt{\frac{\tau_0}{\pi \tau_0}}; \quad \lambda_2 = 2\pi \lambda_1 \cdot l \quad (1.67)$$

Поскольку для массивного ( $l \ll \lambda_1$ ) образца величины  $e^{\pm \gamma \lambda_1}$  меняются в огромных пределах, а косинусы колеблются в пределах  $-1 + 1$ , каждое из слагаемых в числителе дроби (1.66) меняется с координатой в произвольный момент времени  $t$ , так, как показано на рис. 1.10.

Скин-эффект как раз и состоит в сильнейшем затухании амплитуд переменных во времени полей по мере углубления от поверхности внутрь образца.

В заключение обратим внимание на любопытную деталь, связанную с тем, в какой степени модель, рассмотренная в п. 1.1.4, может соответствовать представлению о реальном металле.

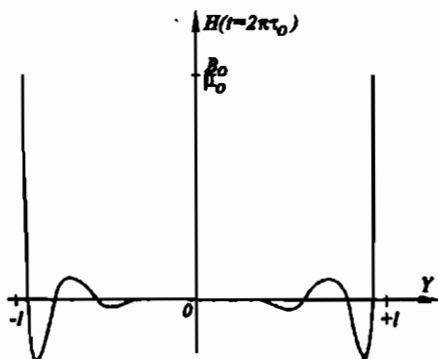


Рис. 1.10. Распределение напряженности магнитного поля внутри  $xz$ -сечения образца. Показано на те моменты времени, когда  $t = 2\pi \cdot \tau_0 \cdot \text{целое число}$

1) Из формулы (1.66) в пределе  $\tau_0 \rightarrow \infty$  (стационарное магнитное поле) получаем равенство  $H(y) = (B_0 / \mu_0)$ , означающее, что диамагнитная реакция вообще отсутствует. Такой результат неудивителен, поскольку мы пренебрегли "орбитальным" движением электронов.

В п. 1.1.4 не потребовалось вводить предположения о силе или слабости поля  $\vec{H}$ . Частоту  $\omega = \frac{|q| \cdot \mu_0 \cdot H}{m}$  не с чем было сравнивать, поскольку электроны до включения поля оказались движущимися прямолинейно и равномерно. Однако в реальном металле такому движению мешает рассеивающее действие дефектов. Если поле  $\vec{H}$  окажется настолько сильным, что  $\frac{2\pi}{\omega} \ll \tau_\sigma$ , электроны практически не будут чувствовать присутствия дефектов: длина их орбиты ( $2\pi R$ ) окажется гораздо меньше длины свободного пробега. Таким образом, описанная в п. 1.1.4 модель вполне применима к реальному металлу в очень сильном магнитном поле.

#### 1.1.6. Сильный диамагнетизм

Допустим, что все электроны образца, способные вносить вклад в ток, в исходном состоянии (до включения поля) покоятся. Покой достаточно понимать в том смысле, что лишь средняя скорость каждого отдельного электрона равна нулю ( $\vec{V}_{0,i} = 0$  для любого  $i$ ). Такое состояние материальной точки означает, что она либо осциллирует вдоль всех пространственных направлений около некоего центра, либо вращается вокруг него (движется по сфере).

Еще одно допущение будет состоять в том, что центр, около которого осциллирует электрон, никакими силами не удерживается на "своем" месте внутри образца, и поэтому электрон может перемещаться вдоль линий электрического поля.

Наконец, третье допущение будет состоять в том, что, несмотря на присутствие в образце дефектов, не происходит рассеяния электронов (отсутствует сопротивление электрическому току). Именно это допущение — основное, что отличает рассматриваемое здесь исходное состояние электронов от состояния их в нормальном металле.<sup>1)</sup>

Первые два допущения приведут нас снова к формуле (1.51), однако третье допущение вынуждает отбросить в ней слагаемое ( $\vec{V}_{др} / \tau_\sigma$ ).

<sup>1)</sup> Сопоставление всех трех допущений недвусмысленно свидетельствует о том, что ответственность за равенство нулю средней скорости в исходном состоянии возлагается не на дефекты.

В результате выражение для плотности тока проводимости приобретает вид:

$$\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{q^2 \cdot n_0}{m} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (1.68)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{J}$  — напомним — напряженность чисто вихревого поля и плотность чисто вихревого тока.

Формально в уравнение (1.68) преобразуется уравнение (1.52) при условии, что  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Поэтому уравнение (1.68) можно считать соответствующим идеальному проводнику.

Остальные три уравнения, необходимые для описания диамагнитной реакции, это (1.1 + 1.3).

Исключив из этой системы поле  $\vec{E}$ , придем к двум уравнениям для  $\vec{H}$  и  $\vec{J}$ :

$$\text{rot rot} \left( \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) + \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^3 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^3} = 0, \quad (1.69)$$

$$\text{rot rot} \vec{H}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \text{rot} \vec{J}(\vec{r}, t). \quad (1.70)$$

Чтобы избежать в дальнейшем громоздкого математического анализа, условимся включать поле *очень* медленно, например, по закону (рис. 1.11)

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 \cdot \left( 1 + \text{th} \frac{t}{\tau_0} \right), \quad (1.71)$$

где  $\tau_0$  — характеристическое “время”, величиной которого будет распоряжаться по собственному усмотрению.

1) Представив уравнение (1.57) в виде

$$-\lambda^2 \text{rot rot} \left( \frac{\vec{W}}{\tau_0} + \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \vec{W} + \tau_{\text{пл}}^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{W}}{\tau_0} + \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right) \right\},$$

легко заметить, что при условии  $\tau_{\text{пл}} \ll \tau_0 \ll \tau_\sigma$  можно пренебречь уже величиной

$\left( \frac{\vec{W}}{\tau_0} \right)$  (если, конечно,  $\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{\vec{W}}{\tau_0}$ ), и тогда уравнение (1.57) перейдет в (1.69). Это вполне

очевидно, ибо неравенство  $\tau_0 \ll \tau_\sigma$  означает, грубо говоря, что редкие столкновения электронов с дефектами не играют роли в диамагнитной реакции, когда внешнее поле колеблется с очень большой частотой.

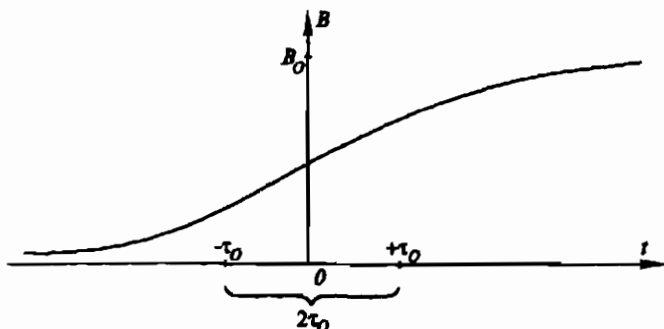


Рис. 1.11. Изменение индукции в ходе очень медленного процесса включения. Процесс начался в далеком прошлом ( $t \rightarrow -\infty$ ) и закончится в столь же отдаленном будущем ( $t \rightarrow +\infty$ ). Любой из моментов  $t$ , принадлежащих интервалу  $\pm \tau_0$ , можно считать моментом ("современным") наблюдения

В таком случае процесс включения рассматривается начавшимся в бесконечно далеком прошлом, а любой момент времени из интервала  $-\tau_0 \leq t \leq +\tau_0$  считается текущим моментом наблюдения.<sup>1)</sup>

Два начальных условия представляются совершенно очевидными:

$$\vec{H}(\vec{r}, t = -\infty) = 0, \quad \vec{J}(\vec{r}, t = -\infty) = 0. \quad (1.72)$$

Проинтегрировав уравнение (1.69) по времени, получим

$$\text{rot rot } \vec{H}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{H}(\vec{r}, t)}{\lambda^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \mathcal{K}, \quad (1.73)$$

где  $\mathcal{K}$  — постоянная интегрирования, не зависящая от времени.

Поскольку из условий (1.72) следует, что

$$\text{rot rot } \vec{H}(\vec{r}, t = -\infty) = 0, \quad \text{rot } \vec{J}(\vec{r}, t = -\infty) = 0,$$

получаем из уравнения (1.70):

$$\left. \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \right|_{t = -\infty} = 0.$$

<sup>1)</sup> Существенное изменение величины  $B$  происходит лишь за промежутки времени  $\Delta t > \tau_0$ . Таким образом, от  $\tau_0$  зависит лишь темп нарастания поля, но не продолжительность включения.

Так как уравнение (1.73) справедливо для любого момента  $t$ , подставим  $\left. \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \right|_{t=-\infty}$  в уравнение (1.73), написав:

$$\text{rot rot } \vec{H}(\vec{r}, t=-\infty) + \frac{\vec{H}(\vec{r}, t=-\infty)}{\lambda^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \left. \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \right|_{t=-\infty} = \mathcal{K}.$$

Поскольку каждое из слагаемых в левой части равно нулю, очевидно, что и  $\mathcal{K} = 0$ . В результате приходим к системе уравнений для  $\vec{H}$  и  $\vec{J}$  в виде

$$\text{rot rot } \vec{H}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{H}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.74)$$

$$\text{rot } \vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{H}(\vec{r}, t)}{\lambda^2}. \quad \text{i)} \quad (1.75)$$

Подчеркнем, что равенство (1.75) справедливо при всех  $t$ . В частном случае для стационарного состояния ( $t \rightarrow \infty$ ):

$$\text{rot } \vec{J}(\vec{r}) = -\frac{\vec{H}(\vec{r})}{\lambda^2}. \quad (1.76)$$

Именно это соотношение было постулировано в 1935 г. Ф. и Г. Лондонами.

Напомним, что мы по-прежнему имеем дело с примером, описанным на рис. 1.1: бесконечно протяженный вдоль осей  $Z, X$  массив-

1) Дифференцируя уравнение (1.1), получаем:  $\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$ .

После этого, используя уравнения (1.2,3), получаем:

$$\text{rot rot } \vec{H} - \text{rot } \vec{J} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Далее, выражая  $\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$  с помощью уравнения (1.74), получаем уравнение (1.75).

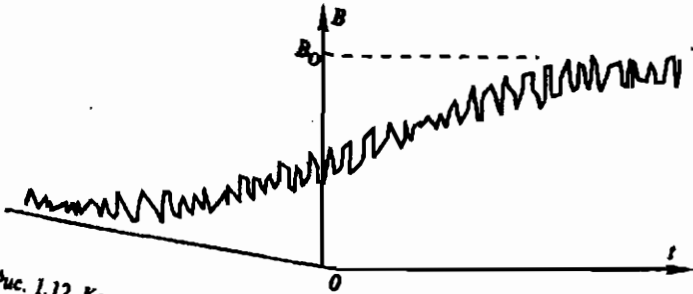


Рис. 1.12. Качественная зависимость  $B(t)$  внутри пустого соленоида, бесконечно протяженного вдоль осей  $Z, X$ . Замысловатая осциллирующая кривая символизирует некогерентную суперпозицию множества гармоник, которые не затухают с течением времени

ный ( $l \gg \lambda$ ) образец помещен внутри бесконечно протяженного вдоль осей  $Z, X$  соленоида, ширина которого  $2L \gg 2l$ .

Решение уравнения (1.74) выглядит очень громоздким, и потому сделаем (еще до введения граничных условий) небольшое отступление.

Если убрать образец из соленоида и медленно (см. формулу (1.71)) подключать соленоид к источнику питания, магнитное поле внутри пустого соленоида будет меняться во времени, как показано качественно на рис. 1.12. Осциллирующая составляющая на самом деле есть некогерентная суперпозиция бесконечно большого числа гармоник, причем наименьшее значение частоты

$$\Omega_{\text{мин}} = 2\pi \cdot \frac{c}{2L}.$$

Плавная же составляющая меняется как раз в соответствии с формулой (1.71). Из рис. 1.12 видно, что осцилляции не затухают со временем. Так и должно быть для соленоида, бесконечно протяженного вдоль оси  $Z$ . Но если длина его окажется конечной, то в стационарном состоянии ( $t \rightarrow +\infty$ ) "выживет" лишь плавная составляющая ( $B(t \rightarrow +\infty) \rightarrow B_0$ ), а все гармоники будут излучены в окружающее соленоид пространство через торцы, как только ток, питающий соленоид, перестанет меняться во времени.

Анализ уравнения (1.74) показывает, что величину  $\vec{H}$  (внутри образца) также можно представить в виде суммы плавной ( $\vec{H}_{\text{плв}}$ ) и

осциллирующей ( $\vec{H}_{\text{осци}}$ ) составляющих. При этом наименьшее значение частоты гармоники  $\vec{H}_{\text{осци}}$  внутри образца

$$\omega_{\text{мин}} = \frac{2\pi}{\tau_{\text{пл}}} = 2\pi \sqrt{\frac{q^2 \cdot n_0}{m \cdot \varepsilon_0}} \approx 10^{16} \text{ Гц.}$$

Перейдем к решению уравнения (1.74). Представим  $H$  в виде

$$H(y, t) = H_{\text{плв}}(y, t) + H_{\text{осци}}(y, t). \quad (1.77)$$

Поскольку параметр  $\tau_0$  можно сделать сколь угодно большим<sup>1)</sup>, вполне допустимо оперировать величинами, усредненными по такому промежутку времени  $\Delta t$ , что

$$\tau_0 \gg \Delta t \gg \frac{2\pi}{\Omega_{\text{мин}}} \gg \frac{2\pi}{\omega_{\text{мин}}}. \quad (1.78)$$

Тогда можно считать, что внешнее поле не содержит осциллирующей составляющей (например, изменяется согласно формуле (1.71)). Усредненное по интервалу  $\Delta t$  значение поля ( $\bar{H}$ ) внутри образца, как следует из (1.77), равно

$$\bar{H}(y, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} H_{\text{плв}}(y, t') \cdot dt' + \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} H_{\text{осци}}(y, t') \cdot dt'. \quad (1.79)$$

Естественно назвать плавной такую составляющую, которая не изменяется за промежутки  $\Delta t$ , если  $\Delta t \ll \tau_0$ . Тогда

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} H_{\text{плв}}(y, t') \cdot dt' \approx \bar{H}_{\text{плв}}(y, t) = H_{\text{плв}}(y, t). \quad (1.80)$$

1) Импульс, приобретаемый электронами за весь период включения магнитного поля, зависит не от продолжительности включения, а только от "перепада" величины  $\vec{H}$  — разности

$$\vec{H}(t=+\infty) - \vec{H}(t=-\infty).$$



Что же касается составляющей, которая колеблется с частотой  $\omega$ , то, согласно лемме Римана,<sup>1)</sup> на интервале  $t - \frac{\Delta t}{2} \leq t' \leq t + \frac{\Delta t}{2}$ :

$$\overline{H_{\text{осц}}}(y, t) = \frac{\overline{H_{\text{плав}}}(y, t)}{\omega \cdot \Delta t} = \frac{H_{\text{плав}}(y, t)}{\omega \cdot \Delta t}. \quad (1.81)$$

В силу принятых неравенств (1.78):

$$\omega \cdot \Delta t \geq \omega_{\text{мин}} \cdot \Delta t \gg 2\pi,$$

и потому

$$\overline{H_{\text{осц}}}(y, t) \ll H_{\text{плав}}(y, t). \quad (1.82)$$

Тогда можно положить

$$\overline{H}(y, t) \approx H_{\text{плав}}(y, t).$$

Таким образом, значение поля  $H(y, t)$  усредненное на интервале  $\Delta t (\ll \tau_0)$ , может выступать в роли "мгновенного" значения плавной составляющей.

Преобразуем уравнение (1.74) в соответствии с примером на рис. 1.1:

$$\frac{\partial^2 H(y, t)}{\partial y^2} - \frac{H(y, t)}{\lambda^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H(y, t)}{\partial t^2}. \quad (1.83)$$

Подставив в него (1.77) и усреднив по интервалу  $\Delta t$ , получим:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 H_{\text{плав}}(y, t)}{\partial y^2} \right) - \frac{H_{\text{плав}}(y, t)}{\lambda^2} + \left( \frac{\partial^2 H_{\text{осц}}(y, t)}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{H_{\text{осц}}(y, t)}{\lambda^2} \right) = \\ & = \frac{1}{c^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 H_{\text{плав}}(y, t)}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{c^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 H_{\text{осц}}(y, t)}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

<sup>1)</sup> См. Г. Джеффрис, Б. Свирлс. Методы математической физики, вып. 2, М., Мир, 1970, с. 283. Лемма Римана состоит в утверждении:

$$\int_a^b f(t) \cdot \sin \omega t \cdot dt \approx 0 \left( \frac{1}{\omega} \right).$$

Приняв, что  $H_{\text{плв}}(y, t) \sim (1 + \text{th} \frac{t}{\tau_0})$  (см. (1.71)), получаем:

$$\left( \frac{\partial^2 H_{\text{плв}}(y, t)}{\partial t^2} \right) = \frac{2 H_{\text{плв}}(y, t)}{\tau_0^2} \cdot \text{th} \frac{t}{\tau_0} \cdot (1 - \text{th} \frac{t}{\tau_0}).$$

Так как

$$2 \left| \text{th} \frac{t}{\tau_0} \right| \cdot (1 - \text{th} \frac{t}{\tau_0}) < 4,$$

то (вспоминая, что  $\lambda = 2\pi \cdot \frac{c}{\omega_{\text{мин}}}$ )

$$\frac{1}{c^2} \left| \left( \frac{\partial^2 H_{\text{плв}}(y, t)}{\partial t^2} \right) \right| < \frac{4}{c^2 \cdot \tau_0^2} \cdot |H_{\text{плв}}(y, t)| \ll \frac{|H_{\text{плв}}(y, t)|}{\lambda^2}.$$

На этом основании отбросим первое слагаемое в правой части уравнения (1.84). Что касается осциллирующей составляющей, то:

$$\frac{\partial^2 H_{\text{осц}}}{\partial y^2} \approx \frac{H_{\text{осц}}}{\lambda^2}; \quad \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 H_{\text{осц}}}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot H_{\text{осц}} \geq \frac{\omega_{\text{мин}}^2}{c^2} \cdot H_{\text{осц}} = \frac{H_{\text{осц}}}{\lambda^2},$$

так что на основании соотношения (1.82) можно отбросить в уравнении (1.84) все слагаемые, содержащие  $H_{\text{осц}}(y, t)$ .

В итоге уравнение (1.84) принимает вид

$$\frac{\partial^2 H_{\text{плв}}(y, t)}{\partial y^2} - \frac{H_{\text{плв}}(y, t)}{\lambda^2} = 0 \tag{1.85}$$

с граничными условиями:

$$H_{\text{плв}}(y, t) = H_{\text{плв}}(-y, t) \quad (\text{в силу симметрии}), \tag{1.86}$$

$$H_{\text{плв}}(|y|=l, t) = B(t) / \mu_0 \cdot 1) \tag{1.87}$$

1) Все сказанное на с. 38—41 имеет прямое отношение к обоснованию предположения (1.18). Именно: следует считать, что равенство (1.18) может быть справедливым для плавной составляющей поля  $\vec{E}$ , если включить внешнее поле ( $\vec{B}$ ) достаточно медленно. Импульс же, передаваемый каждому электрону в процессе включения поля  $\vec{B}$ , не зависит от быстроты включения (то есть не зависит в нашем примере от параметра  $\tau_0$ ).

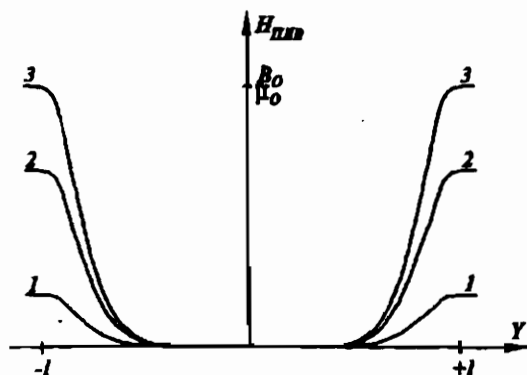


Рис. 1.13. Распределение поля по сечению образца в разные моменты времени:

1 — “немного” спустя после “начала” включения; 2 — в середине процесса включения; 3 — в стационарном состоянии (по “завершении” процесса включения)

Решение уравнения (1.85) с этими граничными условиями имеет вид

$$H_{\text{плв}}(y, t) = \frac{B(t)}{\mu_0} \cdot \frac{\text{ch} \frac{y}{\lambda}}{\text{ch} \frac{l}{\lambda}} \quad (1.88)$$

и приведено на рис. 1.13 для разных моментов времени. Решение для плавной составляющей плотности тока имеет вид:

$$J_{\text{плв}}(y, t) = \frac{B(t)}{\mu_0 \cdot \lambda} \cdot \frac{\text{sh} \frac{y}{\lambda}}{\text{ch} \frac{l}{\lambda}} \quad (1.89)$$

Из выражений (1.88, 1.89) ясно, почему параметр  $\lambda$  был назван глубиной проникновения поля и плотности тока в массивный ( $l \gg \lambda$ ) образец.

Если мы подсчитаем величину тока  $i$ , циркулирующего в сечении образца длиной  $L$  вдоль оси  $Z$ , то

$$i(t) = L \cdot \int_0^l J_{\text{плв}}(y, t) dy = \frac{L \cdot B(t)}{\mu_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\text{ch} \frac{l}{\lambda}}\right) = \frac{B(t) \cdot L}{\mu_0}$$

( $\text{ch} \frac{l}{\lambda} \gg 1$  при условии  $l \gg \lambda$ ).

Таким образом, создается обоснованное представление о том, что практически весь вихревой ток течет в узком слое толщины  $\lambda$ :

$$i(t) = \frac{B(t)}{\mu_0 \cdot \lambda} \cdot \text{th} \frac{l}{\lambda} \cdot \lambda \cdot L = \frac{B(t)}{\mu_0} \cdot L$$

( $\text{th} \frac{l}{\lambda} \approx 1$  при условии  $l \gg \lambda$ ).

В свою очередь на подобном основании можно считать, что этот ток создает (как и должно быть, согласно уравнению (1.3)) внутри образца — за пределами слоя толщиной  $\lambda$  — собственное магнитное поле

$$H_{\text{н}}(t) = - \frac{di(t)}{dL} = - \frac{B(t)}{\mu_0},$$

направленное навстречу внешнему.

Поэтому результирующее поле внутри (вдали от поверхности)

$$H(t) = \frac{B(t)}{\mu_0} + H_{\text{н}}(t) \rightarrow 0.$$

Вот почему описанную в этом разделе диамагнитную реакцию справедливо назвать сильной.

## §1.2. Термодинамический подход

### 1.2.1. Постановка задачи

Образец неограниченно больших размеров помещается внутрь соленоида, который затем подключается к источнику постоянной ЭДС. Кроме того, образец все время находится в контакте с бесконечно теплоемким термостатом.

В п. 1.2.4. будет доказано, что после завершения переходного процесса включения и установления внутри соленоида и образца постоянного во времени магнитного поля образец оказывается в термодинамическом равновесии с термостатом (автоматически все части образца в равновесии друг с другом).

Равновесное состояние системы, температура которой поддерживается неизменной (за счет контакта с термостатом), характеризуется тем, что совместимое с бесконечно малым изменением возмущающе-

го фактора внутри системы изменение ее состояния не должно вообще приводить к изменению ее свободной энергии. Применительно к нашему случаю это означает, что если в результате установления магнитного поля внутри образца произойдет изменение его свободной энергии на конечную величину  $\Delta E_{\text{св}}$ , то уже вариация этой величины ( $\delta(\Delta E_{\text{св}})$ ) должна оказаться равной нулю при вариации ( $\delta \vec{H}$ ) магнитного поля внутри образца.

Отметим, что постоянное во времени магнитное поле снаружи образца и на его поверхности должно считаться принципиально нефлуктуирующим (неварьируемым). Поэтому с учетом пропорциональности поля внутреннего ( $\vec{H}$ ) полю внешнему ( $\vec{B}/\mu_0$ ) возможны два случая:

— в разных частях образца поле  $\vec{H}$  разное, и тогда его вариация осуществима. То есть можно допустить увеличение плотности магнитного потока в одном месте за счет уменьшения и в другом. Полный поток от внешнего источника при этом изменять не придется:

— во всех частях образца поле  $\vec{H}$  одинаковое, и тогда вариация его неосуществима.

Теперь вычислим изменение свободной энергии. Выделим внутри соленоида малый объем  $\Delta v(\vec{r})$ , центром которого является точка, радиус-вектор которой есть  $\vec{r}$  (относительно выбранной системы отсчета). Вне зависимости от того, находится в этом объеме вещество (образец) или нет, в объеме  $\Delta v$  содержится, как известно, чисто магнитная энергия

$$E_{\text{маг}}(\vec{r}) = \Delta v(\vec{r}) \cdot \frac{\mu_0 \cdot H^2(\vec{r})}{2}, \quad (1.90)$$

где  $\frac{1}{2} \mu_0 \cdot H^2(\vec{r}) \equiv \epsilon_{\text{маг}}(\vec{r})$  — объемная плотность энергии. Разумеется, если вещество образца заполняет этот объем  $\Delta v(\vec{r})$ , то на величину  $E_{\text{маг}}(\vec{r})$  увеличивается энергия образца.

Таким образом, мы установили, чему равен прирост потенциальной энергии. Чтобы рассчитать, чему равно изменение кинетической энергии электронов, присутствующих в элементе объема  $\Delta v(\vec{r})$ , необходимо располагать значениями энергии электронов в двух стационарных состояниях: при  $\vec{H} = 0$  и при  $\vec{H}(\vec{r}) \neq 0$ .

Поскольку энергию в начальном состоянии нужно знать заранее, остается найти лишь значение  $E_{\text{кин}}$  в стационарном магнитном поле.

В наиболее общем случае материальная точка может участвовать в двух движениях: прямолинейном и вращательном. Поэтому ее кинетическая энергия

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \cdot (I \cdot \omega^2 + m \cdot V^2), \quad (1.91)$$

где  $I$  — момент инерции ( $I = m \cdot R^2$ ) относительно центра вращения;  $\vec{\omega}$  — частота вращения;  $\vec{V}$  — скорость прямолинейного движения центра вращения;  $m$  — масса точечной частицы.

Мы ограничимся рассмотрением лишь двух простых случаев.

### 1.2.1.1. Вращающиеся электроны

Имеется ввиду, что, как до включения магнитного поля, так и после его установления, каждый электрон вращается по орбите. Этот случай мы рассматривали в п. 1.2.1, где и было выяснено, что единственным результатом включения магнитного поля является изменение частоты вращения каждого электрона, причем на одну и ту же величину  $\Delta\vec{\omega}$  независимо от исходной величины  $\vec{\omega}_0$ . Тогда приращение кинетической энергии на пару частиц, вращавшихся с разными частотами в противоположные стороны и по орбитам равного радиуса, составляет

$$\Delta E_{\text{кин}} = 2 \cdot \frac{m \cdot R_i^2}{2} \cdot \Delta\omega^2 = \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot H^2 R_i^2}{4 m}, \quad (1.92)$$

где  $R_i$  — радиус орбиты  $i$ -го электрона еще в отсутствие магнитного поля.

Пользуясь случаем, снова отметим, что сохранение радиуса ( $R_i$ ) орбиты неизменным автоматически означает равенство нулю суммы всех сил, действующих на электрон в стационарном и однородном магнитном поле.

### 1.2.1.2. Прямолинейно движущиеся электроны

Мы рассмотрим здесь случай, когда до включения поля равны нулю как средняя скорость прямолинейного движения ( $\langle \vec{V} \rangle = 0$ ), так и

средняя частота вращения ( $\langle \vec{\omega} \rangle = 0$ ) каждого электрона<sup>1</sup>). Эту ситуацию мы обсуждали в п. 1.1.4, где было показано, что в результате включения магнитного поля каждый подобный электрон начнет двигаться вдоль той силовой линии вихревого электрического поля  $\vec{E}_v(\vec{r})$ , что проходит через точку, в которой электрон покоился до включения.

Поскольку внутри образца макроскопически больших размеров силовая линия поля  $\vec{E}_v$  простирается на огромное расстояние, движение вдоль нее в пределах объема  $\Delta v$ , протяженность которого вдоль нее же ограничена, обоснованно следует считать прямолинейным<sup>2</sup>).

Если присутствие в образце дефектов-рассеивателей не мешает электронам двигаться по инерции (когда поле  $\vec{E}_v$  исчезнет), каждый из них будет обладать в стационарном магнитном поле скоростью прямолинейного движения

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{q \cdot \mu_0 \cdot \vec{A}(\vec{r})}{m}.$$

Следовательно прирост кинетической энергии на один электрон, находящийся внутри маленького объема, с центром около точки, радиус-вектор которой есть  $\vec{r}$ , составляет

$$\Delta E_{\text{кин}}(\vec{r}) = \frac{m \cdot v^2(\vec{r})}{2} = \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot A^2(\vec{r})}{2m}. \quad (1.93)$$

Пользуясь случаем, напомним, что на каждый движущийся электрон действуют две силы: Лоренца и холловская, равные по величине и противоположные по направлению, если движение происходит вдоль линии, на которой  $A = \text{const}$ . Стоит только электрону чуть-чуть отклониться от этой траектории, как разбаланс сил почти мгновенно вернет его на место.

Итак, в нашем распоряжении две формулы (1.92, 1.93), описывающие прирост кинетической энергии отдельной частицы, обладающей одной определенной степенью свободы: либо вращения, либо прямолинейного и равномерного движения.

1) Непривычное, возможно, понятие средней частоты вращения приходится применять, когда, например, частица совершает очень быстрое вращение то по, то против часовой стрелки. Частота вращения — это вектор.

2) Если  $A_x = -H_z \cdot y$  (как в нашем примере на рис. 1.1), то линии поля  $\vec{E}_v$  — прямые. Если  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{r}$ , то линии поля  $\vec{E}_v$  — концентрические окружности.

1.2.2. Ситуация в пространственно неоднородном магнитном поле

Поскольку мы заранее не знаем, какое из выражений (1.92) или (1.93) совместимо с неоднородным или же однородным распределением (а может быть, с обоими) магнитного поля  $\vec{H}$  внутри образца, остается произвести проверку.

Обратимся сначала к выражению (1.93). Тем самым мы считаем, что форму и размеры элементарного объема  $\Delta v(\vec{r})$  можно выбрать так, чтобы для всех  $N$  электронов, постоянно находящихся внутри объема  $\Delta v(\vec{r})$ , величину  $\vec{A}$  можно было считать одинаковой.

Пусть:

$$e_{кин}(\vec{r}) = N \cdot \Delta E_{кин}(\vec{r}) \cdot \frac{1}{\Delta v(\vec{r})} = n(\vec{r}) \cdot \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot A^2(\vec{r})}{2m}$$

Поскольку все части образца находятся в равновесии друг с другом, концентрация электронов не должна зависеть от координат, и

$$e_{кин}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{A^2(\vec{r})}{\lambda^2}, \tag{1.94}$$

где  $\lambda^2 = \frac{m}{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n}$  1)

Используя формулы (1.90) и (1.94) и учитывая, что  $dv \equiv dv(\vec{r})$ , запишем приращение свободной энергии образца в виде

$$\begin{aligned} \Delta E_{св} &= \int_v dv \cdot \left\{ e_{кин}(\vec{r}) + e_{маг}(\vec{r}) \right\} = \frac{\mu_0}{2} \int_v dv \cdot \left\{ \frac{A^2(\vec{r})}{\lambda^2} + H^2(\vec{r}) \right\} = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \int_v dv \cdot \left\{ \frac{A^2(\vec{r})}{\lambda^2} + (\text{rot } \vec{A}(\vec{r}))^2 \right\}. \quad 2) \end{aligned} \tag{1.95}$$

Возьмем вариацию  $\delta(\Delta E_{св})$ , отвечающую вариации  $\delta \vec{A}$ , и приравняем нулю:

$$\delta(\Delta E_{св}) = \mu_0 \int_v dv \cdot \left\{ \frac{\vec{A} \cdot \delta \vec{A}}{\lambda^2} + (\text{rot } \vec{A}) \cdot (\text{rot } \delta \vec{A}) \right\} = 0. \tag{1.96}$$

1) В этом параграфе независящее от координат значение концентрации электронов обозначается символом  $n$ .

2) Ради краткости принято обозначение  $d^3 \vec{r} \equiv dv$  в пределах объема  $v$ .



Выражение  $(\text{rot } \vec{A}) \cdot (\text{rot } \delta \vec{A})$  приведем к виду

$$\text{rot rot } \vec{A} \cdot \delta \vec{A} - \text{div} [\text{rot } \vec{A} \times \delta \vec{A}],$$

после чего преобразуем один из интегралов по объему в интеграл по поверхности образца:

$$\int_v (\text{rot } \vec{A}) \cdot (\text{rot } \delta \vec{A}) \cdot dv = \int_v (\text{rot rot } \vec{A} \cdot \delta \vec{A}) \cdot dv - \int_{S_{\text{пов}}} [\text{rot } \vec{A} \times \delta \vec{A}]_{\text{пов}} \cdot d\vec{S}_{\text{пов}}. \quad (1.97)$$

Последний интеграл в правой части (1.97) равен нулю согласно принятому в п. 1.2.1 условию о неварьируемости поля на поверхности. Тогда (1.96) переходит в

$$\int_v dv \cdot \left( \frac{\vec{A}}{\lambda^2} + \text{rot rot } \vec{A} \right) \cdot \delta \vec{A} = 0. \quad (1.98)$$

Теперь нужно решить, допустима ли вариация вектора  $\vec{A}$  внутри образца. Дело в том, что в соответствии со сказанным в п. 1.2.1 варьировать следует поле  $\vec{H}$ , а не  $\vec{A}$ . Поэтому, если  $\vec{A}$  зависит от  $\vec{r}$  линейно, это означает, что поле  $\vec{H}$  пространственно однородно и варьировать  $\vec{A}$  нельзя.

Представим себе, что поле  $\vec{H}$  — именно однородное, и, стало быть, в (1.98) необходимо положить  $\delta \vec{A} = 0$ , после чего

$$\frac{\vec{A}}{\lambda^2} + \text{rot rot } \vec{A} \neq 0. \quad (1.99)$$

Так как  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ , а из однородности  $\vec{H}$  следует, что  $\text{rot } \vec{H} = 0$ , неравенство (1.99) означает, что  $\vec{A} \neq 0$ . Вполне разумно предположить, что, например,

$$\vec{A} \sim \vec{r} \quad (1.100)$$

(при этом  $\text{rot } \vec{A} = \vec{H} \neq 0$ ).

Таким образом предположению, что  $\delta \vec{A} = 0$ , отвечает, казалось бы, вполне разумная (то есть соответствующая условию  $\vec{H} = \text{const}$ ) зависимость  $\vec{A}$  от  $\vec{r}$ . Тем не менее, если считать, что  $\vec{H}$  не зависит от  $\vec{r}$ , то поле  $\vec{H}$  и на поверхности (точки которой принадлежат образцу) такое же, как внутри. А поскольку, согласно условию, принятому в п. 1.2.1,  $\vec{H}_{\text{пов}} = \vec{H}_{\text{внеш}} \neq 0$ , теперь получается, что  $\vec{H}_{\text{внутр}} = \vec{H}_{\text{пов}} = \vec{H}_{\text{внеш}} \neq 0$ .

Тем не менее, если образец — магнетик (например, как у нас, диамагнетик) поле внешнее обязано отличаться от поля внутри. Таким образом, выражение (1.93) несовместимо с пространственно однородным распределением поля  $\vec{H}$  внутри образца.

Обратимся снова к уравнению (1.98), но на этот раз допустим, что  $\delta\vec{A} \neq 0$ , тем самым полагая поле  $\vec{H}$  пространственно неоднородным.

Тогда из (1.98) следует, что

$$\frac{\vec{A}}{\lambda^2} + \text{rot rot } \vec{A} = 0, \quad (1.101)$$

откуда с учетом равенства  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$  получаем:

$$\frac{\vec{H}}{\lambda^2} + \text{rot rot } \vec{H} = 0. \quad (1.102)$$

Мы получили точно такое же уравнение (описывающее вместе с граничными условиями пространственное распределение поля  $\vec{H}$ ), что и с позиций электродинамики. Тем не менее мы нигде не пользовались понятиями “ток”, “плотность тока”, как и должно быть при рассуждениях в рамках термодинамики. Лишь теперь уместно вспомнить об уравнении Максвелла  $\vec{J} = \text{rot } \vec{H}$ , которое можно использовать и для стационарного состояния. Подстановка этого уравнения в (1.102) приводит также к знакомому уравнению:

$$\frac{\vec{J}}{\lambda^2} + \text{rot rot } \vec{J} = 0. \quad (1.103)$$

Решение уравнения (1.102) существует с граничными условиями (1.86, 1.87), одно из которых (1.87) удовлетворяет введенному в самом

начале §1.2 требованию равенства  $\vec{H}_{\text{пов}} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ . Таким образом, выражение (1.93) совместимо с распределением  $\vec{H}$  внутри образца по закону

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\text{ch } y/\lambda}{\text{ch } l/\lambda}.$$

## 1.2.3. Ситуация в пространственно однородном магнитном поле

В предыдущем параграфе мы проверили, с каким пространственным распределением совместимо выражение (1.93). Теперь испытываем выражение (1.92).

В неограниченно протяженном во всех направлениях образце всегда можно выделить объем  $\Delta v(\vec{\tau})$ , внутри которого уместится  $N$  одноэлектронных орбит. Прирост кинетической энергии, приходящейся на пару электронов, вращавшихся еще в отсутствие поля по орбитам одинакового радиуса с одинаковой частотой, но в противоположных направлениях, составляет согласно (1.92),

$$\frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot H^2(\vec{\tau})}{4m} \cdot R_i^2.$$

Поэтому

$$e_{\text{кин}}(\vec{\tau}) = \frac{1}{\Delta v(\vec{\tau})} \cdot \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot H^2(\vec{\tau})}{4m} \cdot \sum_{i=1}^{N/2} R_i^2. \quad (1.104)$$

Поскольку все части образца находятся в равновесии друг с другом, одноэлектронные орбиты должны быть распределены в образце однородно. Можно представить объем  $\Delta v(\vec{\tau})$  в виде, например, кубика площадью сечения (перпендикулярного вектору  $\vec{H}(\vec{\tau})$ )  $\Delta S$  и протяженностью (вдоль вектора  $\vec{H}(\vec{\tau})$ )  $\Delta L$ . Разобьем этот кубик (вдоль вектора  $\vec{H}(\vec{\tau})$ ) на  $N^{1/3}$  слоев одноэлектронной толщины. Тогда  $\frac{1}{2} N^{2/3}$  пар электронных орбит будет содержаться в каждом сечении площадью  $\Delta S$ . Учитывая, что одни орбиты перекрываются, другие касаются друг друга, а между некоторыми могут быть "щели", введем коэффициент "упаковки"  $K$ <sup>1)</sup>.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N/2} \pi \cdot R_i^2 = N^{1/3} \cdot \pi \cdot \sum_{s=1}^{\frac{1}{2} N^{2/3}} R_s^2 = N^{1/3} \cdot \frac{\Delta S}{K},$$

<sup>1)</sup> Исходя из условий равновесия всех частей образца друг с другом следует считать коэффициент  $K$  одинаковым для каждого из  $N^{1/3}$  слоев одноэлектронной толщины.

так что

$$\pi \cdot \sum_{i=1}^{N/2} R_i^2 = N^{1/2} \cdot \frac{\Delta S}{\kappa}. \quad (1.105)$$

Подставляя (1.105) в (1.104), получаем:

$$\begin{aligned} e_{\text{кин}}(\vec{r}) &= \frac{N^{1/2}}{\Delta L \cdot \Delta S} \cdot \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot H^2(\vec{r})}{4\pi \cdot m} \cdot \frac{\Delta S}{\kappa} = \\ &= \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot \kappa} \cdot H^2(\vec{r}), \end{aligned} \quad (1.106)$$

где  $\frac{N^{1/2}}{\Delta L} = \left(\frac{N}{\Delta L^3}\right)^{1/2} = \left(\frac{N}{\Delta v}\right)^{1/2} = n^{1/2}$ , а  $n$  — объемная концентрация электронов.

Используя формулы (1.90) и (1.106), запишем .

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{св}} &= \int_v dv \cdot \left\{ e_{\text{кин}}(\vec{r}) + e_{\text{маг}}(\vec{r}) \right\} = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \cdot \int_v dv \cdot \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot \kappa} \right) \cdot H^2(\vec{r}). \end{aligned} \quad (1.107)$$

Возьмем вариацию  $\delta(\Delta E_{\text{св}})$ , отвечающую вариации  $\delta\vec{H}$ , и приравняем к нулю:

$$\delta(\Delta E_{\text{св}}) = \mu_0 \cdot \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot \kappa} \right) \cdot \int_v dv \cdot \vec{H}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{H}(\vec{r}) = 0. \quad (1.108)$$

Теперь нужно решить, допустима ли вариация  $\delta\vec{H}(\vec{r})$ . Если  $\delta\vec{H}$  зависит от  $\vec{r}$ , можно положить  $\delta\vec{H}(\vec{r}) \neq 0$ , но тогда из (1.108) следует, что

$$\vec{H}(\vec{r}) = 0$$

повсюду в образце, в том числе и на поверхности. Это, однако

не согласуется с возможностью вариации величины  $\vec{H}$ : нельзя варьировать величину, повсюду равную нулю<sup>1)</sup>.

Пусть тогда  $\delta\vec{H}(\vec{r}) = 0$ , что означает независимость  $\vec{H}$  от  $\vec{r}$  повсюду в образце (включая поверхность). Отсюда следует, что:

$$\vec{H}_{\text{внутр}} = \vec{H}_{\text{пов}}.$$

Поскольку же согласно условию, принятому в п. 1.2.1,

$$\vec{H}_{\text{пов}} = \vec{H}_{\text{внеш}} \neq 0,$$

получаем равенство

$$\vec{H}_{\text{внутр}} = \vec{H}_{\text{внеш}} \neq 0,$$

которое совершенно противоречит представлению об образце как о магнетике, в котором  $\vec{H}_{\text{внутр}} \neq \vec{H}_{\text{внеш}}$ .

Представим выражение (1.108) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0}{1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot K}} \cdot \int dv \cdot \left\{ \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot K} \right) \cdot \vec{H}(\vec{r}) \right\} \times \\ & \times \delta \left[ \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot K} \right) \cdot \vec{H}(\vec{r}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.109)$$

И, если, считая, что фигурирующая в (1.109) величина  $\vec{H}$  равна  $\vec{H}_{\text{внутр}}$  и не зависит от  $\vec{r}$ , положить

$$\left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot K} \right) \cdot \vec{H} \equiv \vec{H}_{\text{внеш}}, \quad (1.110)$$

то уже эта последняя величина по определению должна быть не варьируемой и повсюду одной и той же.

<sup>1)</sup> Таким образом выявлена несовместимость выражения (1.92) с пространственно неоднородным распределением магнитного поля внутри образца (т.е. с зависимостью  $\vec{H}$  от  $\vec{r}$ ).

Вспоминая определение относительной магнитной проницаемости<sup>1)</sup>, получаем:

$$\mu \equiv \frac{H_{\text{внутр}}}{H_{\text{внеш}}} = \frac{H}{H_{\text{внеш}}} = \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot K} \right)^{-1}. \quad (1.111)$$

С точностью до коэффициента упаковки  $K$  мы пришли к такому же выражению для  $\mu$ , что и с позиций электродинамики. Тем не менее мы не пользовались понятием “ток”, как и должно быть при рассуждениях в рамках термодинамики.

Однако теперь можно вспомнить, что скачок напряженности магнитного поля на поверхности образца “вызывает” появление стационарного чисто вихревого тока линейной плотностью

$$\frac{dl_{\text{пов}}}{dz} = H_{\text{пов}} - H_{\text{внутр}} = H_{\text{внеш}} - H = \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot K} \cdot H.$$

Это — также знакомое нам выражение (и тоже с точностью до коэффициента упаковки).

1) Обычно относительную магнитную проницаемость вводят с помощью соотношений:

1)  $\vec{H}_{\text{внутр}} = \vec{H}_{\text{внеш}} + \vec{M}$ , где  $\vec{M}$  — магнитный момент единицы объема магнетика (“намагниченность”); 2)  $\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}_{\text{внеш}}$ , где  $\chi$  — магнитная восприимчивость; 3)  $\vec{H}_{\text{внутр}} = (1 + \chi) \cdot \vec{H}_{\text{внеш}}$ ; 4)  $1 + \chi \equiv \mu$  — относительная магнитная проницаемость.

После этого  $\vec{H}_{\text{внутр}} = \mu \cdot \vec{H}_{\text{внеш}}$ . Для диамагнетика:  $\chi < 0$  и  $\mu < 1$ .

Поле стороннего источника — намагничивающее — мы по-прежнему называли внешним, а в роли намагниченности  $\vec{M}$  у нас выступала величина  $\vec{H}_m$ , имеющая такую же, как и  $\vec{M}$ , размерность. Во всех расчетах мы связывали  $\vec{H}_m$  с  $\vec{H}_{\text{внутр}}$ , а не с  $\vec{H}_{\text{внеш}}$ . Поэтому

$$1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot K} \equiv \frac{1}{\mu}, \quad \text{а } \chi = \mu - 1 = - \frac{\frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot K}}{1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/2}}{4\pi \cdot m \cdot K}}.$$

#### 1.2.4. Коллектив электронов, двигающихся в отсутствие магнитного поля прямолинейно и равномерно

Сначала придется выдвинуть предположения о характере стационарного состояния. Примем<sup>1)</sup>, что:

1) магнитное поле ( $\vec{H}$ ) внутри образца пространственно однородное;

2) все электроны в магнитном поле вращаются в плоскости ( $xy$ ), перпендикулярном вектору  $\vec{H}$ , но при этом движутся прямолинейно и равномерно вдоль оси  $Z$ ;

3) центры всех одноэлектронных орбит однородно распределены в плоскости  $xy$ , отвечающей любой  $z$ -координате;

4) все электроны вращаются в одном направлении с одинаковой частотой  $\vec{\omega} = -q \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} / m$ ;

5) размеры образца неограниченно велики во всех направлениях.

Первые три предположения взаимно согласованы, причем первые два позволяют использовать конкретное выражение для кинетической энергии  $i$ -го электрона в магнитном поле:

$$E_i = \frac{I_i \cdot \omega_i^2}{2} + \frac{m \cdot V_{z,i}^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left[ \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot H^2}{m^2} \cdot R_i^2 + V_{z,o,i}^2 \right], \quad (1.112)$$

где  $I_i = m \cdot R_i^2$  — момент инерции относительно центра орбиты радиуса  $R_i$ ;  $V_{z,o,i}$  — оставшаяся неизменной, несмотря на включение магнитного поля,  $z$  — компонента скорости. Четвертое предположение позволяет снять индекс “ $i$ ” с частоты; пятое — игнорировать “антидиаманитный” вклад поверхности.

Теперь нужно найти, чему равно изменение кинетической энергии, если таковое произошло в результате установления магнитного поля. И здесь возникает серьезная трудность.

Формально:

$$E_i(\vec{H}) - E_i(\vec{H} = 0) = \frac{m}{2} \cdot \left[ \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot H^2}{m^2} \cdot R_i^2 - (V_{x,o,i}^2 + V_{y,o,i}^2) \right].$$

Однако мы не можем в принципе установить связь между  $R_i^2$  и начальными  $x, y$ -компонентами скорости, не проследив, как движется

<sup>1)</sup> Принимаемые предположения можно обосновать лишь в рамках электродинамического подхода.

$i$ -й электрон в процессе включения поля, а в рамках равновесной термодинамики такой подход исключен. Обойти это затруднение неожиданно помогает вот какое соображение. В п. 1.2.2 и п. 1.2.3 мы проверяли совместимость предложенных выражений для разности энергий с предложенными пространственными распределениями магнитного поля внутри образца.

В этом параграфе подобная проверка была бы бессмысленной в силу заранее предопределенной согласованности принятых допущений. Можно лишь попытаться найти выражение для относительной магнитной проницаемости и затем сравнить его с выражениями (1.47) и (1.111).

Есть два пути реализации поставленной цели.

Первый — воспользоваться термодинамическим определением диамагнитной проницаемости:

$$\frac{\mu_0}{\mu} = \frac{\partial^2 e}{\partial H^2}, \quad (1.113)$$

где  $e$  — плотность полной энергии внутри магнетика,  $H \equiv H_{\text{внутр}}$ .

Выделив объем  $\Delta v = \Delta S \cdot \Delta L$ <sup>1)</sup>, содержащий  $N$  одноэлектронных орбит, запишем, используя (1.91)<sup>2)</sup>, плотность кинетической энергии в виде

$$e_{\text{кин}} = \frac{1}{\Delta S \cdot \Delta L} \cdot \frac{m}{2} \cdot \left\{ \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^{N/2} R_i^2 + \sum_{i=1}^N V_{z,0,i}^2 \right\} = \frac{n^{1/3} \cdot m \cdot \omega^2}{2\pi \cdot \Delta S} \cdot \sum_{j=1}^{\frac{1}{2} N^{2/3}} \pi \cdot R_j^2 + \\ + \frac{m}{2 \cdot \Delta v} \cdot \sum_{i=1}^N V_{z,0,i}^2 = \frac{n^{1/3} \cdot m \cdot \omega^2}{2\pi \cdot K} + \frac{m}{2 \cdot \Delta v} \cdot \sum_{i=1}^N V_{z,0,i}^2, \quad (1.114)$$

где  $K$  — уже вводившийся нами коэффициент упаковки орбит в сечении  $\Delta S$ .

С учетом (1.90):

$$e = e_{\text{кин}} + e_{\text{маг}} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{\pi \cdot m \cdot K} \right) \cdot H^2 + \frac{m}{2 \cdot \Delta v} \cdot \sum_{i=1}^N V_{z,0,i}^2. \quad (1.115)$$

1) Этот объем можно считать бесконечно малым, учитывая неограниченные размеры образца.

2) См. также сс. 50, 51.



Подставляя (1.115) в (1.113), получаем

$$\frac{1}{\mu} = \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{\pi \cdot m \cdot \kappa} \right). \quad (1.116)$$

Второй путь состоит в задании столь сильного магнитного поля, чтобы пренебречь энергией каждого электрона, которой тот обладал до включения поля.

Тогда:

$$E_i(H) = \frac{m}{2} \cdot \frac{q^2 \cdot \mu_0^2 \cdot H^2 \cdot R_i^2}{2},$$

и

$$\begin{aligned} e(H) &= \frac{\mu_0}{2} \cdot \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{\pi \cdot m \cdot \kappa} \right) \cdot H^2 = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \cdot H \cdot \left[ \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{\pi \cdot m \cdot \kappa} \right) \cdot H \right]. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Сравним это выражение с хорошо известным для плотности магнитной энергии в магнетике:

$$e(H) = \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot H_{\text{внутр}} \right) \cdot H_{\text{внеш}}. \quad (1.118)$$

Очевидно, что положив в (1.117)

$$\mu \equiv \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{\pi \cdot m \cdot \kappa} \right)^{-1},$$

мы получим возможность интерпретировать величину

$$\left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{\pi \cdot m \cdot \kappa} \right) \cdot H$$

как  $H_{\text{внеш}}$ , и тогда выражения (1.117) и (1.118) совпадают.

### 1.2.5. Принципиальные затруднения классической теории

Следует обратить внимание на два обстоятельства:

1) Необходимо строго обосновать понятие “орбита” электрона (в частности, в стационарном магнитном поле). Ведь в рамках классической электродинамики электрон, движущийся по орбите, должен непрерывно терять энергию, излучая ее в пространство.

2) Необходимо точно знать энергии каждого из электронов в отсутствие и в присутствии поля. В связи с этим вернемся к только что рассмотренному в п. 1.2.4 примеру. Фактически мы должны перейти к статистической картине распределения свободных электронов по состояниям с различными скоростями, и отсюда — к расчету кинетической энергии всего коллектива. В отсутствие поля:

$$e_{\text{кин}} = \frac{m}{2} \cdot \int_{V=0}^{V_{\text{макс}}} V^2 \cdot G_{\vec{V}} \cdot 4\pi V^2 dV = \int_{E=0}^{E_{\text{макс}}} E \cdot G_E \cdot dE, \quad (1.119)$$

где  $G_{\vec{V}}$  — число разных состояний (с разной по величине и (или) направлению скоростью, приходящихся на  $1 \text{ см}^3$  объема вещества и на  $1 \text{ см}^3/\text{с}^3$  “объема пространства скоростей”<sup>1)</sup>);  $G_E$  — число разных состояний с одинаковой энергией  $E$ , приходящихся на  $1 \text{ см}^3$  и на  $1 \text{ эВ}$ .

Совершенно аналогично надо поступить, рассчитывая  $e_{\text{кин}}(H)$  в присутствии поля. Но для этого тоже надо знать величину  $G$ , а она, безусловно, отличается от прежней, так как состояние в поле заданной напряженности  $\vec{H}$  характеризуется другими параметрами: величиной и направлением  $z$ -компоненты скорости и, по-видимому, радиусом орбиты. Но именно радиусы стационарных орбит мы не можем знать, так как в нашем распоряжении одно уравнение

$$\omega \cdot R_i(\vec{H}) = V_{xy,i}(\vec{H}) \quad (1.120)$$

с двумя неизвестными  $R_i$  и  $V_{xy,i}$ . Есть все основания полагать, что модуль скорости  $V_{xy,i}$  больше в присутствии поля, чем в его отсутствии (для любого  $i$ ).

1) Предполагается, что в каждом состоянии, в котором  $V \leq V_{\text{макс}}$ , находится один электрон, а в состояниях, в которых  $V > V_{\text{макс}}$ , электронов нет. То же самое касается энергетических состояний.

Мы ухитрились обойти необходимость знать  $R_i^2$ , положив, что

$$\pi \sum_{s=1}^{N/2} R_s^2 = \frac{\Delta S}{K},$$

где коэффициент упаковки  $K$  считался — само собой разумеется (и это самое главное) — не зависящим от  $H$ . Тогда, даже если  $K$  сильно отличается от единицы, наш анализ остается качественно правильным.

Квантовый подход к проблеме диамагнитной реакции позволил разрешить оба затруднения. Основное, конечно, то, что удалось придать смысл понятию “стационарная орбита в магнитном поле”. Причем оказалось, что вопреки классическому представлению о непрерывном множестве всевозможных радиусов, последние оказываются квантованными так, что площадь одноэлектронной орбиты удовлетворяет соотношению

$$S_i = \frac{\pi \cdot \hbar \cdot [2(i-1) + 1]}{|q| \cdot \mu_0 \cdot H}, \quad (1)$$

где  $i = 1, 2, 3$ :

Общее же число орбит (со всеми возможными  $i$ ), которое может располагаться в  $xy$  сечении образца площадью  $S$ , оказывается также строго определенным и равным

$$N = \frac{S \cdot |q| \cdot \mu_0 \cdot H}{2\pi \hbar}. \quad (1.121)$$

Выражение (1.121) позволило установить вид функции  $G_E$  в магнитном поле напряженностью  $\vec{H}$ :

$$G_E(H) = \frac{(2m)^{1/2}}{(2\pi \hbar)^2} \cdot |q| \mu_0 H \cdot \sum_{\gamma=0}^{\gamma_{\max}} \left[ E - \frac{\hbar^2 |q| \mu_0 H}{m} \cdot \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (1.122)$$

где число  $\gamma_{\max}$  определяется из условия сохранения числа электронов. В приложении 1 приведен расчет относительной магнитной проницаемости  $\mu$ , основанный на вычислении изменения полной

1) Это соотношение, требует, чтобы через площадь кольца между соседними орбитами (с общим центром) проходил 1 квант магнитного потока, равный  $\frac{2\pi \hbar}{|q|}$ .

энергии 1 см<sup>3</sup> вещества из-за внесения его в магнитное поле. При этом используется формула (1.122).

#### 1.2.6. Термодинамически равновесное состояние образца в стационарном магнитном поле

В этом параграфе мы сначала убедимся в том, что такое состояние действительно возможно, а затем выясним, какую роль оно играет в диамагнитной реакции.

Прежде всего заметим, что возникающий в процессе включения магнитного поля диамагнитный ток (чисто поверхностный или же распределенный неоднородно по всему сечению) — исключительно вихревой, и, следовательно, никакого результирующего переноса заряда, вещества, импульса, энергии из одной части образца в другую не происходит. Стало быть, возникновение тока не нарушает равновесия частей.

Теперь покажем, что вне зависимости от темпа ( $\tau_0$ ) процесса включения внешнего поля в течение всего этого времени не происходит односторонней непрерывной передачи тепла от образца термостату, несмотря на извлечение из внешнего источника энергии для возбуждения диамагнитного тока<sup>1)</sup>.

Будем для простоты считать, что передача энергии от электронного газа к кристаллической решетке (то есть превращение электромагнитной энергии, полученной за счет взаимодействия с источником внешнего магнитного поля, в тепло) происходит спустя конечный промежуток времени после включения внешнего поля — спустя так называемое время ( $\tau_E$ ) релаксации энергии.

В таком случае очевидно, что если  $\tau_0 < \tau_E$ , передачи тепла термостату в процессе включения не происходит: электромагнитная энергия внутри образца еще не успеет превратиться в тепло.

Рассмотрим тогда противоположный — идеализированный случай:  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Выясним на примере сильной диамагнитной реакции, нарушается ли равновесие образца с термостатом.

---

<sup>1)</sup> Энергию можно отбирать, например, от источника постоянной ЭДС, к которому подключается соленоид (внутри него уже находится образец). Можно использовать энергию движения собственной руки, вставляющей образец в зазор постоянного магнита.

Пусть (рис. 1.11, 1.13)

$$H_z = H_0 \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{y}{\lambda}}{\operatorname{ch} \frac{l}{\lambda}} \cdot \left(1 + \operatorname{th} \frac{l}{\tau_0}\right); \quad H_x = H_y = 0.$$

В этом случае проекции векторов электрического поля и плотности тока равны (см. п. 1.1.6):

$$\epsilon_x = \frac{\mu_0 \cdot H_0 \cdot \lambda}{\tau_0} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{y}{\lambda}}{\operatorname{ch} \frac{y}{\lambda}} \cdot \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{l}{\tau_0}\right), \quad \epsilon_y = \epsilon_z = 0;$$

$$J_x = \frac{H_0}{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{y}{\lambda}}{\operatorname{ch} \frac{l}{\lambda}} \cdot \left(1 + \operatorname{th} \frac{l}{\tau_0}\right), \quad J_y = J_z = 0.$$

Плотность мощности ( $\mathcal{P}$ ), поглощаемой электронами (от источника внешнего поля),

$$\mathcal{P} = \epsilon_x \cdot J_x = \frac{1}{\tau_0} \cdot \left[ \frac{\mu_0 \cdot H_0^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{y}{\lambda}}{\operatorname{ch} \frac{y}{\lambda} \cdot \operatorname{ch} \frac{l}{\lambda}} \cdot \left(1 + \operatorname{th} \frac{l}{\tau_0}\right) \cdot \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{l}{\tau_0}\right) \right].$$

Очевидно, что

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \mathcal{P} = 0! \quad 1)$$

Тем самым энергия единицы объема ( $\mathcal{P} \cdot \Delta t$ ), которая может быть превращена в тепло за промежуток времени  $\Delta t$ , такой, что  $\tau_E < \Delta t \ll \tau_0$ , достаточно мала ( $\mathcal{P} \cdot \Delta t \rightarrow 0$  при  $\tau_0 \rightarrow \infty$ ) по сравнению с

1) Несмотря на это за бесконечно большое время включения электроны запасут конечную энергию; плотность ее равна

$$e(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P} \cdot dt = \left[ \operatorname{ch} \left(\frac{l}{\lambda}\right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{y}{\lambda}\right) \right]^{-1} \cdot (2 \mu_0 \cdot H_0^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \left(\frac{y}{\lambda}\right)).$$

Какой разительный контраст с процессом подключения образца несверхпроводящего металла к источнику потенциального электрического поля: в это время и поле  $\epsilon$ , и плотность тока  $J$  в образце монотонно нарастают. В стационарном состоянии обе величины конечны.

энергией, запасенной образцом (за время  $\Delta t$ ). Но ведь равновесие образца с термостатом как раз и сопровождается почти непрерывными передачами друг другу малых порций энергий.

После того, как процесс включения закончился, электрическое поле ( $E_x$ ) повсюду исчезнет. Тогда, если и произойдет в каком-то небольшом объеме внутри образца торможение электронов, то есть уменьшение плотности тока, то, наряду с выделением малой порции тепла, произойдет увеличение магнитного поля (стало быть, появление поля электрического). Это будет способствовать увеличению плотности тока, однако не только в рассматривавшемся объеме, но и в других частях образца<sup>1)</sup>. Выделившаяся порция тепла поглощается соседним объемом, из-за чего электроны в нем ускоряются. Тогда магнитное поле там уменьшается, а следовательно, плотность тока и там, и в других частях образца также уменьшится. Мы описали развитие и затухание флуктуации внутри образца. Если аналогичные события происходят у самой поверхности, то выделившаяся порция тепла поступает частично в термостат, а затем уже из термостата поступает порция тепла в образец через его поверхность.

Тот факт, что появление-исчезновение вихревого электрического поля обязательно сопровождает взаимообмен порциями тепловой энергии (частей образца друг с другом и образца в целом с термостатом), как раз и является причиной, эффективно ликвидирующей флуктуацию магнитного поля и диамагнитного тока любого происхождения. Вот почему не затухает этот ток. Вот почему, если только концентрация электронов, участвующих в диамагнитной реакции, не зависит от температуры, не зависят от нее и величины, и вид пространственного распределения магнитного поля и диамагнитного тока, которые установились в процессе включения.

### §1.3. Особенности диамагнитной реакции образца — элемента электрической цепи

Рассмотрим образец в форме галеты (рис. 1.14), включенный в электрическую цепь, содержащую источник постоянной ЭДС и резисторы (рис. 1.15). Выясняя, каким образом развивается процесс нарастания тока в образце, будем основываться на тех же моделях металла, о которых шла речь в §§1.3, 1.5, 1.6 и которым соответствовали два типа реакций.

1) В тех, куда простирается возникшее электрическое поле.

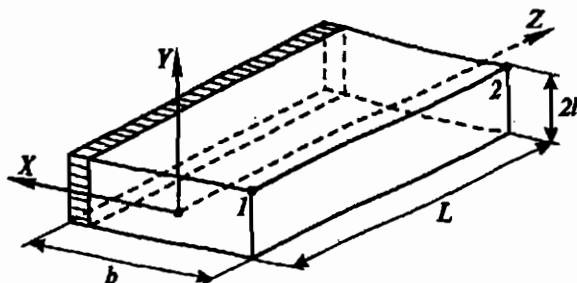


Рис. 1.14. Образец. Выделен слой "одноэлектронной" толщины

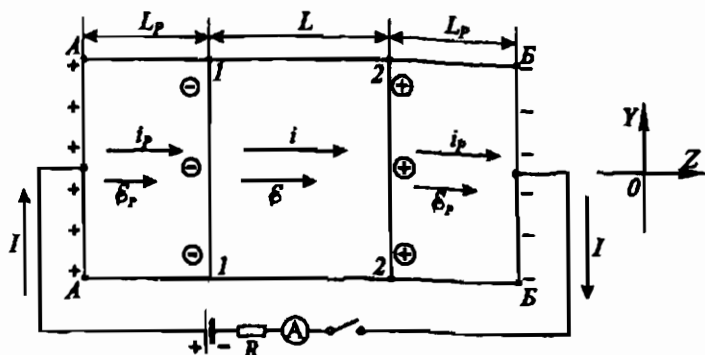


Рис. 1.15. Схема цепи:

плюсы и минусы символизируют заряды на контактах в некоторый момент времени после замыкания тумблера

### 1.3.1. Слабая диамагнитная реакция

Согласно одной из моделей, в исходном бестоковом — состоянии электроны "вращаются" по "орбитам" различных радиусов с разными частотами, а, оказавшись в электрическом поле, не переставая "вращаться", вовлекаются еще и в дрейф (вдоль силовой линии поля).

Выясним, что представляет собой диамагнитная реакция, того типа, которая доживает до стационарного состояния<sup>1)</sup>.

1) Скин-эффекта касаться не будем.

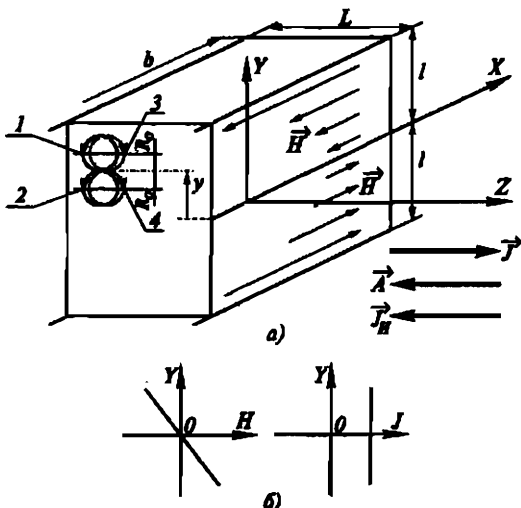


Рис. 1.16. Вращающиеся электроны:

*a* — сечение образца параллельно слою “одноэлектронной толщины”. Все четыре орбиты — одинакового радиуса  $R_0$ . Линия наибольшего сближения “верхних” и “нижних” орбит проходит на расстоянии  $y$  от начала координат;  
*b* — распределение плотности тока и магнитного поля вдоль оси  $Y$ .

Поскольку ток, инициированный источником ЭДС, в свою очередь порождает вихревое магнитное поле, частоты вращающихся (и дрейфующих) электронов за время нарастания тока до стационарного значения изменятся на величину

$$\Delta\vec{\omega}(y) = -\frac{q \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(y)}{2m}, \quad (1.123)$$

где  $\vec{H}$  — стационарное значение напряженности магнитного поля, зависящее от координаты  $y$  (см. рис. 1.16, б).

Рассмотрим перпендикулярный оси  $X$  слой “одноэлектронной толщины”, а в этом слое — четыре орбиты одинакового (для простоты) радиуса  $R_0$ , расположенные, как показано на рис. 1.16, *a*. Будем считать радиус  $R_0$  очень малым по сравнению со значением координаты линии “контакта” верхних и нижних орбит. Будем также считать равными исходные значения частот  $\omega_{0,1}$  и  $\omega_{0,3}$ ,



$\omega_{0,2}$  и  $\omega_{0,4}$ <sup>1)</sup>. Результирующий ток вдоль оси  $Z$  на “высоте”  $y$ , образованный из кусков одноэлектронных орбит, равен

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= q \cdot \left\{ [\vec{\omega}_{0,1} + \Delta\vec{\omega}(H_{y+R_0})] + [\vec{\omega}_{0,3} + \Delta\vec{\omega}(H_{y-R_0})] \right\} - \\ &- q \cdot \left\{ [\vec{\omega}_{0,2} + \Delta\vec{\omega}(H_{y+R_0})] + [\vec{\omega}_{0,4} + \Delta\vec{\omega}(H_{y-R_0})] \right\} = \\ &= 2q \cdot \Delta\vec{\omega}(H_{y+R_0}) + q \cdot (\vec{\omega}_{0,1} + \vec{\omega}_{0,3}) - 2q \cdot \Delta\vec{\omega}(H_{y-R_0}) - \\ &- q \cdot (\vec{\omega}_{0,2} - \vec{\omega}_{0,4}) = 2q \cdot \left\{ \Delta\vec{\omega}(H_{y+R_0}) - \Delta\vec{\omega}(H_{y-R_0}) \right\}. \quad (1.124) \end{aligned}$$

Так как  $R_0 \ll y$ , можно написать (с учетом равенства  $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ ):

$$H(y \pm R_0) = H(y) \pm \frac{\partial H}{\partial y} \cdot R_0 = H(y) \pm J \cdot R_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta\omega(H_{y \pm R_0}) &= \Delta\omega(H_{y \pm J \cdot R_0}) = \Delta\omega(H_y) + \Delta\omega(H = \pm J \cdot R_0) = \\ &= \Delta\omega(H_y) + \left( \pm \frac{q \cdot \mu_0}{2m} \cdot J \cdot R_0 \right). \quad (1.125) \end{aligned}$$

Подставляя (1.125) в (1.124), получаем

$$\vec{i}_1 = - \frac{q^2 \cdot \mu_0}{m} \cdot 2R_0 \cdot \vec{J}. \quad 2) \quad (1.126)$$

Поскольку вдоль оси  $X$  находится  $(b \cdot n^{1/3})$  слоев “одноэлектронной толщины” ( $n^{1/3}$  — линейная плотность электронов,  $b$  — протяженность образца вдоль оси  $X$ ), ток, создаваемый всеми такими слоями на “высоте”  $y$ , равен

$$\vec{i} = \vec{i}_1 \cdot b \cdot n^{1/3} = - \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{m} \cdot \vec{J} \cdot b \cdot 2R_0,$$

а плотность этого тока в слое площадью  $b \cdot 2R_0$

$$\vec{J}_n = - \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{m} \cdot \vec{J}. \quad (1.127)$$

1) Обоснованность допущений о “попарном” равенстве радиусов и частот обсуждалась в п. 1.1.3.

2) Мы не касаемся проблемы упаковки орбит в сечении  $yz$  (см. по этому поводу п. 1.2.3).

Как видим, ток плотностью  $\vec{J}_n$  течет в сторону, противоположную току плотностью  $\vec{J}$ . Тогда можно представить  $\vec{J}$  как разность плотностей “внешнего” тока (созданного только за счет внешней по отношению к образцу электрической цепи) и им же индуцированного (вот почему использован символ  $\vec{J}_n$ ):

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{внеш}} + \vec{J}_n. \quad (1.128)$$

Подставляя (1.127) в (1.128), получаем

$$\vec{J}_n = - \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{m} \cdot \vec{J}_{\text{внеш}}, \quad (1.129)$$

$$1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{m}$$

причем

$$- \left( 1 + \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{m} \right)^{-1} \cdot \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{m} \equiv \chi \quad (1.130)$$

уже известная нам диамагнитная восприимчивость.

Таким образом, рассмотренная только что диамагнитная реакция состоит в уменьшении плотности тока, остающейся однако **однородно** распределенной по сечению образца.

### 1.3.2. Сильная диамагнитная реакция

Согласно другой обсуждавшейся в п. 1.1.б. модели, будем считать, что в исходном — бестоковом — состоянии все электроны “покоятся”, а кроме того отсутствует электрическое сопротивление.

Система уравнений, описывающих процесс установления тока в образце — элементе цепи, оказывается очень громоздкой как раз из-за необходимости учитывать влияние внешней цепи. Упростим последующий анализ, используя не очень строгий способ, сущность которого сводится к следующему:

I. Сначала запишем три уравнения, связывающие поля и плотность тока проводимости только внутри образца:

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.131)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t), \quad (1.132)$$

$$\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{q^2 \cdot n}{m} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (1.133)$$

(Основываясь на опыте, приобретенном в §1.1, мы игнорировали в уравнении (1.132) ток смещения).

II. Разложим поле  $\vec{E}$  на две составляющие: чисто вихревую, порождаемую нарастающим внутри образца магнитным полем, и потенциальную, создаваемую зарядами на контактах — эквипотенциалах и потому не зависящую от  $y$ <sup>1)</sup>. Итак:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_v(\vec{r}, t) + \vec{E}_n(\vec{r}, t). \quad (1.134)$$

Заметим, что у нас есть все основания считать темп нарастания тока в гораздо большей степени зависящим от обстановки во внешней цепи, чем от поля  $\vec{E}_v$ . Последнее само зависит от темпа нарастания магнитного поля, током же порождаемого.

Таким образом, можно положить, что

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{d\vec{i}(t)}{dt} = \frac{q^2 \cdot n}{m} \cdot \vec{E}_n(t), \quad (1.135)$$

где  $\vec{i}(t)$  — величина тока, протекающего через все сечение площади (см. рис. 1.14)

$$S = 2l \cdot b.$$

Тем не менее пространственно неоднородное распределение плотности тока по сечению может быть вызвано только вихревым электрическим полем. Поэтому логично считать, что  $\operatorname{rot} \vec{J}(\vec{r}, t) \neq 0$ , и:

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{q^2 \cdot n}{m} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q^2 \cdot n}{m} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}_v(\vec{r}, t).$$

В результате система уравнений (1.131—1.133) преобразуется к виду

$$\operatorname{rot} \vec{E}_v(\vec{r}, t) = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.136)$$

<sup>1)</sup> Однородность этой составляющей вдоль оси  $X$  очевидна. Эта составляющая может считаться не зависящей от  $z$  вдали от контактов. Расчет показывает, что это “вдали” — на расстоянии уже  $\approx 1$  мкм (несколько длин  $\lambda$ ).

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t), \quad (1.137)$$

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{q^2 \cdot n}{m} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}_B(\vec{r}, t). \quad (1.138)$$

Разрешив систему (1.136—1.138) относительно  $\vec{J}$ , получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.139)$$

где  $\lambda \equiv \sqrt{\frac{m}{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n}}$  — уже известная глубина проникновения.

Применительно к нашему примеру (рис. 1.16) уравнение (1.139) принимает вид

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial J_z(y, t)}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\partial J_z(y, t)}{\partial t}. \quad (1.140)$$

Одно из граничных условий вытекает из соображений симметрии:

$$J_z(y, t) = J_z(-y, t). \quad (1.141)$$

Другое условие получим с помощью соотношения (1.135):

$$2b \cdot \int_0^l J_z(y, t) \cdot dy = i(y) = 2b \cdot l \cdot \frac{q^2 \cdot n}{m} \cdot \int_0^l \epsilon_{n,z}(t') \cdot dt'$$

или

$$\int_0^l J_z(y, t) \cdot dy = \frac{q^2 \cdot n \cdot l}{m} \cdot \int_0^l \epsilon_{n,z}(t') \cdot dt'. \quad (1.142)$$

III. Зависимость  $\epsilon_{n,z}(t)$  будет искать, анализируя процессы, происходящие в цепи с образцом, на этот раз пренебрегая магнитным полем, порождаемым током.

Приступим теперь к реализации изложенной программы. Решение уравнения (1.140) имеет вид

$$\frac{\partial J_z(y, t)}{\partial t} = K_1 \cdot e^{-\frac{y}{\lambda}} + K_2 \cdot e^{\frac{y}{\lambda}},$$

где  $K_1, K_2$  — должны быть функциями  $t$ .

С учетом условия (1.141)  $K_1 = K_2 = K$ , и тогда

$$\frac{\partial J_z(y, t)}{\partial t} = 2 K(t) \cdot \operatorname{ch} \frac{y}{\lambda}. \quad (1.143)$$

С учетом условия (1.142) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^l J_z(y, t) \cdot dy &= \int_0^l dy \int_0^t 2 K(t') \cdot \operatorname{ch} \frac{y}{\lambda} \cdot dt' = \\ &= 2\lambda \cdot \operatorname{sh} \frac{l}{\lambda} \cdot \int_0^t K(t') \cdot dt' = \frac{q^2 \cdot n \cdot l}{m} \cdot \int_0^t \epsilon_{n, z}(t') \cdot dt', \end{aligned}$$

откуда

$$K(t) = \frac{q^2 \cdot n \cdot l}{m} \cdot \frac{\epsilon_{n, z}(t)}{2\lambda \cdot \operatorname{sh} \frac{l}{\lambda}},$$

и

$$J_z(y, t) = \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{y}{\lambda}}{\operatorname{sh} \frac{l}{\lambda}} \cdot \frac{q^2 \cdot n}{m} \cdot \int_0^t \epsilon_{n, z}(t') \cdot dt'. \quad (1.144)$$

### 1.3.3. Исчезновение потенциального поля внутри идеального проводника — элемента электрической цепи

Будем исследовать этот процесс методами теории цепей<sup>1)</sup>. Для упрощения выкладок примем следующие условия: площадь поперечного сечения элемента ( $S$ ) одна и та же на всем протяжении от контакта  $A$  до контакта  $B$ ; длины и удельные электропроводности обоих резистивных элементов  $A-1$  и  $B-2$  одинаковы; внутреннее сопротивление источника ЭДС объединено с сопротивлениями обоих элементов — резисторов. Вольт-амперной характеристикой балласт-

1) Обоснование возможности использовать такие методы существует, но в этой книге не приводится.

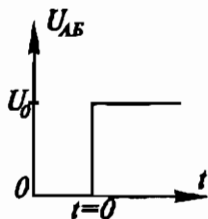


Рис. 1.17. Предполагаемая зависимость напряжения  $U_{AB}$  от времени  $t$

ного резистора  $R$  будем распоряжаться по собственному усмотрению.

Самый простой случай: положить режим идеального “генератора напряжения” относительно контактов  $A, B$  (см. рис. 1.17) после “мгновенного” замыкания тумблера. Символами  $i_p, \epsilon_p$  обозначим ток и напряженность поля внутри резисторов, а  $i, \epsilon$  — внутри образца.

В соответствии со схемой на рис. 1.15 имеем:

уравнение Кирхгофа

$$U_0 = \epsilon \cdot L + 2 \epsilon_p \cdot L_p; \quad (1.145)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{dQ_1}{dt} = i_p - i, \quad (1.146)$$

где  $Q_1$ , заряд на контакте 1;

уравнения, связывающие поля с зарядами на контактах  $A$  и 1:

$$\epsilon_p = \frac{Q_A}{\epsilon_0 \cdot S}, \quad (1.147)$$

$$\epsilon = \frac{Q_A + Q_1}{\epsilon_0 \cdot S}; \quad (1.148)$$

уравнения, связывающие поля с токами:

в идеальном проводнике

$$\frac{di}{dt} = \frac{q^2 \cdot n \cdot S}{m} \cdot \epsilon, \quad (1.149)$$

в резисторе

$$\frac{di_p}{dt} = \frac{S \cdot \sigma \cdot \epsilon_p - i_p}{\tau_\sigma}, \quad (1.150)$$

где  $\tau_\sigma$  — время релаксации электропроводности,  $\sigma$  — удельная электропроводность вещества.

В этих шести уравнениях шесть неизвестных  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_p$ ,  $i$ ,  $i_p$ ,  $Q_A$ ,  $Q_1$ . Вследствие "глобальной" электронейтральности

$$Q_B = -Q_A; \quad Q_2 = -Q_1.$$

Разрешив систему (1.145—1.150) относительно  $\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + \frac{L}{2L_p}\right) \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot \tau_\sigma}{\sigma} \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \left( \frac{q^2 \cdot n \cdot \tau_\sigma}{\sigma \cdot m} + \frac{L}{2L_p} \right) \cdot \varepsilon \right\} + \\ + \frac{1}{\tau_\sigma} \left\{ \left(1 + \frac{L}{2L_p}\right) \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot \tau_\sigma}{\sigma} \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{q^2 \cdot n \cdot \tau_\sigma}{\sigma \cdot m} \cdot \varepsilon \right\} = 0. \quad (1.151) \end{aligned}$$

Если считать, что концентрация электронов в образце ( $n$ ) такая же, как в резисторе, и равна концентрации электронов в зоне проводимости металла, то (1.151) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{L}{2L_p}\right) \cdot \frac{d}{dt} \left( \tau_{пл}^2 \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \varepsilon \right) + \\ + \frac{1}{\tau_\sigma} \left[ \left(1 + \frac{L}{2L_p}\right) \cdot \tau_{пл}^2 \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \varepsilon \right] = 0, \quad (1.152) \end{aligned}$$

где по-прежнему  $\tau_{пл}^2 = (m \cdot \varepsilon_0) / (q^2 \cdot n)$ .

Из уравнения (1.152) сразу же следует равенство нулю стационарного значения поля  $\varepsilon$ . Физически это тоже очевидно. Поскольку ток в образце увеличивается быстрее, чем в резисторах, абсолютная величина заряда на контакте 1 "растет" от нуля до  $|Q_A|$ , из-за чего происходит полная экранировка вещества образца от поля зарядов, созданных источником ЭДС на контактах  $A$  и  $B$ .

Учитывая, что константа  $\tau_{пл}^2$  очень мала ( $\approx 10^{-32}$  с<sup>2</sup>), а величину  $\frac{L}{2L_p}$  можно всегда выбрать не слишком отличной от 1, и учитывая что решение уравнения (1.152) есть сумма экспонент, допустимо положить в уравнении (1.152):

$$\left(1 + \frac{L}{2L_p}\right) \cdot \tau_{пл}^2 \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \ll \varepsilon. \quad (1.153)$$

Это означает отказ от количественного описания переходного процесса на протяжении интервала времени порядка нескольких  $\tau_{пл}$

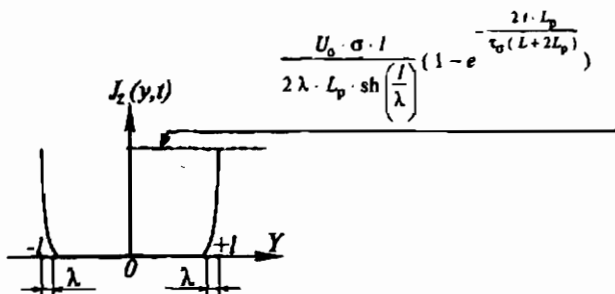


Рис. 1.18. Мгновенное распределение плотности тока в уз-сечении образца

после замыкания тумблера. Дальнейший процесс хорошо описывается уравнением

$$\left(1 + \frac{L}{2L_p}\right) \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{\tau_\sigma} = 0. \quad (1.154)$$

Решение уравнения (1.154) с граничным условием  $\varepsilon(t=0) = \frac{U_0}{L + 2L_p}$

имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{U_0}{L + 2L_p} \cdot \exp\left[-\frac{t}{\tau_\sigma} \cdot \frac{2L_p}{L + 2L_p}\right]. \quad (1.155)$$

Именно эту зависимость напряженности поля от времени и надлежит подставить в качестве  $E_{n,z}(t)$  в уравнение (1.144), после чего можно прийти к окончательному выражению:

$$J_z(y, t) = U_0 \cdot \frac{\sigma}{2L_p} \cdot \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{\text{ch } \frac{y}{\lambda}}{\text{sh } \frac{l}{\lambda}} \cdot \left[1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma} \cdot \frac{2L_p}{L + 2L_p}\right)\right]. \quad (1.156)$$

График зависимости  $J_z(y, t)$  представлен на рис. 1.18.

1) Выражения (1.155), (1.156) правильно описывают лишь заключительную стадию переходного процесса. Поэтому нельзя с их помощью установить, за какое время происходит основной прирост тока.



Если мы вычислим стационарное значение тока во всем сечении образца, то получим

$$2b \cdot \int_0^l J_z(y, t) dy = \frac{U_0 \cdot \sigma \cdot 2b \cdot l}{2L_p},$$

то есть точно такое значение, за которое отвечают одни лишь резистивные элементы. Этот результат можно считать в определенной степени критерием правильности всего подхода.

Таким образом, сильная диамагнитная реакция в рассматриваемом случае состоит в том, что, как следует из уравнения (1.156), плотность тока в образце-элементе цепи столь же неоднородно распределена в уз-сечении, сколь плотность вихревого тока в ху-сечении образца, внесенного в однородное магнитное поле (рис. 1.5).

#### §1.4. Два решающих эксперимента

В истории сверхпроводимости парадоксальным кажется многолетнее стойкое убеждение в том, что хотя сильная диамагнитная реакция не может существовать без идеальной проводимости, последняя вполне может существовать безотносительно какой бы то ни было диамагнитной реакции.

Однако нет дыма без огня: в 1911 г. Камерлинг-Оннес действительно сообщил об открытии им явления только идеальной проводимости. Когда же Майснер и Оксенфельд в 1933 г. открыли явление сильного диамагнетизма<sup>1)</sup>, само собой разумеющимся считалось, что этому явлению не может не сопутствовать идеальная проводимость.

Мы уже убедились в том, что идеальная проводимость и сильная диамагнитная реакция порознь не существуют (см. §§1.1, 1.3). В 1911 г. К.-Оннес попросту не заметил этой реакции. На самом деле, в его знаменитом опыте после уменьшения температуры ниже  $T_{кр}$  помимо зафиксированного эффекта (исчезновения напряжения на образце-элементе цепи) произошло также и существенное перераспределение плотности тока по сечению образца.

<sup>1)</sup> Иногда безосновательно называемого "идеальным" диамагнетизмом (см. с. 21).

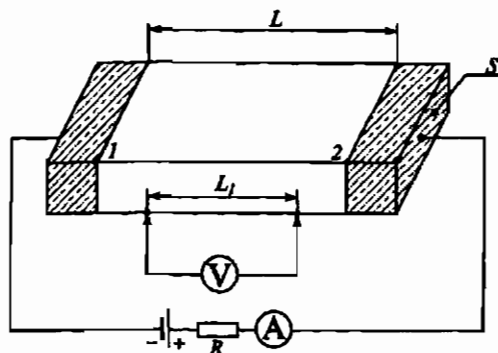


Рис. 1.19. Схема цепи.

Образец ограничен контактами 1, 2. Удельное сопротивление определяют по формуле  $\rho = (U_V \cdot S) / (i_A \cdot L_1)$ , где  $U_V$ ,  $i_A$  — показания вольтметра и амперметра. Поскольку  $U_V = (L_1 / L) \cdot U_{1,2}$  (где  $U_{1,2}$  — напряжение на образце), равенство  $U_V = 0$  возможно только при условии, что  $U_{1,2} = 0$

Тем не менее необходимо сделать два замечания.

Во-первых, в 1911 г. не существовало даже представления о сильной диамагнитной реакции. Во-вторых, целью К.-Онесса было измерение сопротивления образца (при разных температурах), а согласно общепринятой и поныне методике для этого достаточно было организовать такую цепь с образцом и приборами (см. рис. 1.19), которая в принципе не позволяет наблюдать распределение плотности тока по сечению образца.

В действительности нет никакого принципиального различия между явлениями, происходящими при переходе температуры образца сверхпроводника через  $T_{кр}$ : как в том случае, когда образец является элементом цепи с источником постоянной ЭДС, так и когда образец находится в поле постоянного магнита.

В этом параграфе мы попробуем дать объяснение обоим явлениям.

#### 1.4.1. Образец в поле постоянного магнита

Пусть в исходном стационарном состоянии  $T > T_{кр}$  и имеет место слабый диамагнетизм (все электроны под действием дефектов “вращаются”). Подчеркнем, что при этом внутри всего сечения (перпен-

дикулярного вектору плотности внешнего магнитного потока) проходят силовые линии вектор-потенциала  $\vec{A}$ , причем из-за крайней слабости диамагнитной реакции поле  $\vec{A}$  практически такое же, каким оно было бы в отсутствие вещества. Если обратиться к геометрии, принятой на рис. 1.1, то и внутри образца

$$A \approx -\frac{B \cdot y}{\mu_0},$$

поскольку  $\vec{H} \approx \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ . Поэтому, перемещаясь внутри образца по “орбите”, каждый ( $i$ -й) электрон в промежутке между актами рассеяния обладает импульсом

$$\vec{P}_i(\vec{r}, t) = m \cdot \vec{V}_i(t) + q \cdot \mu_0 \cdot \vec{A}(\vec{r}), \quad (1.157)$$

где  $\vec{V}_i(t)$  — скорость на длине пробега между актами рассеяния<sup>1)</sup>. Заметим, что поле  $\vec{A}$  — это “поле импульсов”, и потому с учетом зависимости  $\vec{A}$  от  $\vec{r}$  импульс  $\vec{P}_i$  орбитально движущегося электрона меняется не только по направлению, но и по величине даже при неизменной величине скорости  $V_i$ .<sup>2)</sup>

Теперь рассмотрим переходный процесс, состоящий в уменьшении температуры, и попытаемся представить себе, что происходит в “момент перехода” через значение  $T_{кр}$ .

Ранее мы выяснили, что для создания сильной диамагнитной реакции у каждого электрона еще в бестоковом состоянии должна быть “отнята” способность двигаться поступательно<sup>3)</sup>. Тогда, участвуя в упомянутой реакции, электроны будут двигаться только вдоль силовых линий поля  $\vec{A}$  со скоростями

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = -\frac{q \cdot \mu_0}{m} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (1.158)$$

Таким образом, мы вынуждены предположить, что в “момент перехода” через  $T_{кр}$  возникнет некое внутреннее силовое поле, отнимаю-

1) Здесь было целесообразно выйти за рамки приближения “свободного пробега”. Поэтому указание на зависимость  $\vec{V}_i$  от  $t$  учитывает возможное изменение скорости в промежутке времени между актами рассеяния.

2) В примере на рис. 1.1 часть импульса, равная  $q \cdot \mu_0 \cdot \vec{A}$ , остается неизменной только тогда, когда электрон движется вдоль силовой линии вектора  $\vec{A}$ .

3) Электрон мог бы двигаться таким образом в промежутках между актами рассеяния.

шее сразу у всех электронов те составляющие их импульсов, которые были равны  $m \cdot \vec{V}_i(t)$  и фигурировали в формуле (1.157). Тогда в следующий момент импульс каждого электрона будет определяться только вектором  $\vec{A}$  в той точке  $\vec{r}$ , где оказался электрон в упомянутый выше “момент”  $t_{\text{перехода}}$ :

$$\vec{P}_i(\vec{r}_{\text{перехода}}) = q \cdot \mu_0 \cdot \vec{A}_i(\vec{r}_{\text{перехода}}).$$

Затем все электроны начинают двигаться только вдоль силовых линий вектора  $\vec{A}$  со скоростями, связанными с величинами  $\vec{A}$  соотношением (1.158). В результате возникает вихревой электрический ток, силовые линии которого совпадают с линиями вектора  $\vec{A}$ <sup>1)</sup>. Кроме того, исчезает электросопротивление. Возникновение подобного распределения тока по сечению образца приводит к чрезвычайно сильному уменьшению магнитного поля внутри образца, несмотря на неизменность во времени поля внешнего. Уменьшение поля  $\vec{H}$  внутри влечет за собой появление вихревого электрического поля, причем направленного так, что оно препятствует слишком сильному уменьшению поля  $\vec{H}$ . Как видим, развивается именно сильная диамагнитная реакция.

Опишем теперь процесс, происходящий также в поле постоянного магнита, но при повышении температуры сверх  $T_{\text{кр}}$ .

Пусть в исходном стационарном состоянии имели место сильная диамагнитная реакция и идеальная проводимость. В момент перехода через значение  $T_{\text{кр}}$  прежнее состояние коллектива электронов, в котором все они были защищены от действия рассеивателей, разрушается. Рассеиватели начинают передавать электронам и отбирать от них всевозможные по величине и направлению импульсы. Из-за этого вихревые токи, протекавшие в сечении вдоль силовой линии вектора  $\vec{A}$ , быстро затухают, а движение электрона приобретает “орбитальный” характер.

Затухание тока и уменьшение степени неоднородности его распределения по сечению ведет к увеличению пространственной однородности магнитного поля внутри образца и к возрастанию этого поля по величине внутри сечения. В результате “частоты вращения” всех

<sup>1)</sup> Обратим внимание на то, что в момент  $t_{\text{перехода}}$  величина  $\vec{A}$  линейно связана с координатой  $y$ .

электронов, движение которых приобретает “орбитальный” характер, изменяются на одну и ту же величину

$$\frac{q \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(t)}{m}$$

Развивается уже знакомая нам слабая диамагнитная реакция.

#### 1.4.2. Образец — элемент цепи с источником постоянной ЭДС

Пусть опять в исходном стационарном состоянии  $T > T_{\text{кр}}$ , на контактах образца существует отличное от нуля напряжение, а плотность тока однородно распределена по сечению. При этом внутри образца вдоль линий тока проходят силовые линии вектор-потенциала  $\vec{A}$ . Как и в предыдущем пункте, вновь предположим, что в момент перехода температуры через значение  $T_{\text{кр}}$  возникает некое силовое поле, оставляющее каждому электрону лишь импульс

$$q \cdot \mu_0 \cdot \vec{A}(\vec{r}_{\text{перехода}})$$

той точки поля  $\vec{A}$ , в которой электрон в тот момент оказался. Тогда к одинаковой для всех электронов дрейфовой скорости добавляется величина

$$-\frac{q \cdot \mu_0}{m} \cdot \vec{A}(\vec{r}_{\text{перехода}}),$$

причем зависимость  $\vec{A}$  от  $\vec{r}_{\text{перехода}}$  внутри образца все еще соответствует пространственно однородному распределению плотности тока по сечению.

Затем электроны начинают перемещаться от одного контакта к другому только вдоль силовых линий вектора  $\vec{A}$ <sup>1)</sup>. Развивается сильная диамагнитная реакция. Кроме того, из-за исчезновения электросопротивления полный ток внутри образца начинает возрастать. Вследствие этого увеличивается приток отрицательного заряда к контакту с прежним более положительным потенциалом и положительного заряда к противоположному контакту, что и приводит к полной экранировке образца от электрического поля источника ЭДС.

Пусть теперь в исходном стационарном состоянии:  $T < T_{\text{кр}}$ , напряжение на образце отсутствует, имеет место сильный диамагнетизм.

<sup>1)</sup> Мы пренебрегаем искривлением силовых линий тока вблизи контактов образца с резистивными элементами цепи.

Начнем повышать температуру. В “момент перехода” через значение  $T_{кр}$  исчезает внутреннее силовое поле, из-за чего вступает в силу рассеивающее действие дефектов. В свою очередь электроны перестают двигаться только вдоль линий вектора  $\vec{A}$  и вовлекаются в “орбитальное” движение. Таким образом восстанавливается пространственно однородное распределение тока по сечению образца. Вместе с тем рассеяние электронов уменьшает полный ток, протекающий внутри образца, из-за чего уменьшается по абсолютной величине отрицательный заряд на одном контакте и положительный заряд на противоположном; в образце появляется потенциальное электрическое поле.

В заключение параграфа отметим, что смену характера диамагнитной реакции при переходе температуры через значение  $T_{кр}$  мы объяснили возникновением-затуханием как макроскопических, так и “орбитальных” (микроскопических) токов. Однако для этого нам пришлось привлечь некое внутреннее силовое поле. Его возникновение (исчезновение) тесно связано с так называемым фазовым переходом, кинетика которого в деталях остается пока нераскрытой.

### §1.5. Гипотеза о природе сверхпроводимости

Обобщение результатов экспериментов с массивными образцами различных веществ, вносимыми в поле постоянного магнита или включаемыми в цепь с источником постоянной ЭДС, состоит в следующем:

а) как изолятор (содержащий электроны, “вращающиеся” вокруг атомных ядер), так и нормальный металл (содержащий “свободные” электроны) обнаруживают в стационарном состоянии лишь слабую диамагнитную реакцию и конечную электропроводность;

б) сильная диамагнитная реакция и вместе с тем идеальная проводимость присущи сверхпроводнику.

Теперь сопоставив свойства различных моделей, изученных в §1.1, сформулируем такие требования к электронам сверхпроводника, чтобы последний обнаруживал именно сильную диамагнитную реакцию и идеальную проводимость.

#### 1.5.1. Требования в части, касающейся диамагнитной реакции

1. Электроны должны быть свободными. По крайней мере, они должны вовлекаться в дрейф под действием электрического поля сто-

ронного источника. При этом поле должно менять скорость каждого электрона с быстротой

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{m} \cdot \vec{\mathcal{E}}. \quad (1.159)$$

Аргументом служит тот факт, что в образце вещества, электроны которого могут лишь **вращаться** — каждый вокруг своего силового центра, — но не **перемещаться** в пределах всего образца, возникает только **слабая** диамагнитная реакция. Не возникает даже скин-эффекта, который (пока еще не наступило стационарное состояние) создавали бы “вращающиеся” электроны, если бы они были способны также и перемещаться вдоль линий электрического поля.

2. Каждый электрон, помимо того, чтобы быть свободным, должен выглядеть в исходном (бестоковом) состоянии **покоящимся**. Это значит, что, по крайней мере, его средняя скорость

$$\langle \vec{V} \rangle_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \vec{V}(t') \cdot dt' \right) = 0. \quad (1.160)$$

Аргументом служит тот факт, что в образце вещества, внутри которого еще в отсутствие тока и магнитного поля находятся только прямолинейно движущиеся электроны, **сильная** диамагнитная реакция **даже не возникает**.

3. Равенство средней скорости электрона нулю не должно быть следствием случайных актов рассеяния на дефектах внутри вещества.

Аргументом служит тот факт, что когда такое равенство обусловлено **дефектами**, то автоматически возникает электросопротивление, а сильная диамагнитная реакция хотя и возникает (в виде скин-эффекта), но не доживает до стационарного состояния.

Кроме того добавим, что равенство (1.160) не должно быть следствием отражения электрона от поверхности<sup>1)</sup>.

В качестве примечания ко всем трем пунктам напомним, что не для возникновения, а для **поддержания** сильной диамагнитной реакции в стационарном состоянии требуется идеальная проводимость.

<sup>1)</sup> См. п. 1.5.3 (в конце).

### 1.5.2. Требования в части, касающейся электросопротивления

1. Электроны, находящиеся внутри образца, участвуя в постоянном токе при отсутствии стороннего электрического поля, должны после каждого одночастичного акта рассеяния на дефектах восстанавливаться в токонесящем состоянии<sup>1)</sup>. Аргументом служит тот очевидный факт, что в присутствии дефектов акты рассеяния обязательно происходят.

2. Конечно, совершенно очевидно, что электроны, располагающиеся у самой поверхности, должны перемещаться точно вдоль линий поверхности с момента возникновения тока в присутствии электрического поля вне зависимости от ориентации поля относительно рельефа поверхности (см. рис. 1.20). Однако электроны точно так же должны двигаться и после затухания поля. Аргументом служит тот факт, что сильная диамагнитная реакция совместима только с таким распределением плотности тока в сечении образца, при котором силовая линия тока на поверхности повторяет все ее изгибы<sup>2)</sup>.

### 1.5.3. Гипотетическая модель сверхпроводимости

Попробуем сконструировать модель электронного коллектива, удовлетворяющую всем перечисленным выше требованиям. Такая модель, изображенная на рис. 1.21, символизирует собой ситуацию внутри образца. Как видим, в исходном состоянии каждый электрон способен лишь “осциллировать” около своего положения равновесия (средняя скорость каждого электрона поэтому равна нулю), а вместе с тем все электроны образца связаны друг с другом. Связывающие же их центры способны свободно перемещаться по кристаллу.

Рассмотрим теперь, как происходит дрейф всего такого коллектива от одного контакта к другому, например, когда напряжение на образце уже исчезло. Все, что могут сделать дефекты, — это случайным образом толкать то один, то другой электрон по различным направлениям с различными скоростями. Но всякий раз возникает квазиупругая сила со стороны огромного множества остальных электронов, возвращающая рассеянную частицу в токонесящее состояние до того, как произойдет следующий акт столкновения ее с дефектом. Совершенно очевидно, что при таких условиях для разрушения дрейфа необходимо одновременное рассеивание всех или очень большого числа электронов. Но это невероятное событие.

1) Такое требование, как видим, вовсе не запрещает току флуктуировать.

2) Мы не касаемся квантовых размерных эффектов.



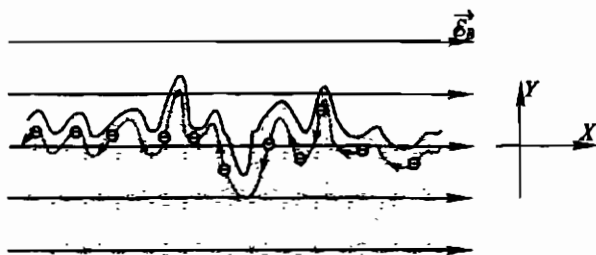


Рис. 1.20. Ориентация вихревого электрического поля относительно рельефа поверхности образца.

Наибольшая плотность тока у самой поверхности, то есть на той “последней” силовой линии, которая обтекает все неровности рельефа. Кажется странным, что столкновения электронов с этими неровностями не приводят к затуханию тока после исчезновения поля



Рис. 1.21. Гипотетическая модель.

Коллектив электронов предстает в виде материальных точек, скрепленных пружинами. Пружины символизируют “плюс-заряды”. Система связанных воедино электронов и “плюс-зарядов” может свободно перемещаться относительно ионов, расположенных в узлах кристаллической решетки

Заметим теперь, что связь электронов, движущихся у самой поверхности, со всеми вообще электронами образца объясняет также, почему сложный рельеф поверхности, с одной стороны, не способен разрушить дрейф электронов, а с другой — почему электрическое поле не в состоянии воспрепятствовать “затеканию” электронов во все складки поверхности. Первое объясняется тем, что не больше половины всех, дрейфующих у поверхности электронов, может в нее упираться. Остальная часть движется в направлении от поверхности. Что касается электронов внутренних областей, то они все помогают своим партнерам, дрейфующим у поверхности (рис. 1.22). Кроме того, именно электроны внутренних областей “отжимают” электроны в складки поверхности.

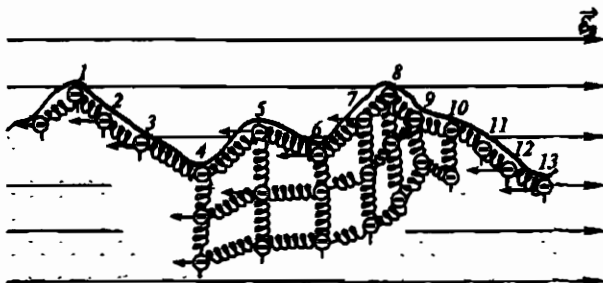


Рис. 1.22. Движение электронов у поверхности.

Электроны 2, 3, 4, “тянут”, а электроны 6, 9, 10, 11, 12, 13 “толкают” упирающиеся в складки поверхности электроны 1, 5, 7, 8. Те электроны, что движутся в глубине, все помогают тем, что движутся у поверхности

#### 1.5.4. Новая проблема

Если мы принимаем только что сконструированную модель, то оказываемся перед необходимостью ответить на естественный вопрос: что именно в веществе играет роль пружин?

Неожиданно этот вопрос вырастает в труднейшую проблему. Во-первых, только плюс-заряды могут связывать электроны. Во-вторых, желая видеть электроны свободными, мы должны позволить этим плюс-зарядам перемещаться, причем именно туда же, куда и электроны, да еще на этапе существования электрического поля. Поэтому в роли плюс-зарядов не могут выступать ни ионы кристаллической решетки, ни какие бы то ни было свободные положительно заряженные частицы.

В-третьих, представим себе, что мы все-таки нашли претендентов на роль плюс-зарядов. Однако, соглашаясь с тем, что они движутся, жестко связавшись с электронами, каким образом сумеем мы объяснить само возникновение электрического тока? Ведь если плюс- и минус-заряды, ранее покоившиеся, движутся вместе в одну сторону с одинаковой скоростью, никакого переноса электрического заряда в пространстве не происходит: парциальные токи будут равны по величине и противоположны по направлению.

Таким образом, принимая модель на рис. 1.21, мы в состоянии объяснить реакцию вещества на поле стороннего магнита, на поле источника ЭДС, но оказываемся перед необходимостью установить природу таких плюс-зарядов, движение которых внутри вещества не создает своего (парциального) электрического тока.

## Глава 2. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ МЕТАЛЛА

### §2.1. Постановка задачи

При объяснении природы сверхпроводимости нужно обязательно учитывать два обстоятельства, одно из которых связано с диамагнитной реакцией металла, другое — с его проводимостью.

Рассмотрим их по очереди.

#### 2.1.1. Диамагнитная реакция

Эксперимент свидетельствует о том, что реакция электронов как реального нормального металла (обладающего электросопротивлением), так и реального сверхпроводника<sup>1)</sup> на переменное магнитное поле одинакова (за исключением не принципиальных особенностей) и сводится к возникновению вихревого переменного тока, плотность которого экспоненциально убывает от поверхности вглубь образца<sup>2)</sup>. Теоретический анализ, проведенный в главе 1, приводит к следующим выводам.

1. Чтобы возникало именно неоднородное распределение плотности вихревого тока в пространстве, средняя по времени скорость каждого в отдельности из электронов, входящих в бесконечно малый объем<sup>3)</sup>, должна быть одинакова. При этом она должна быть отлична от нуля в присутствии магнитного поля и равна нулю до включения поля.

---

1) Имеются в виду образцы очень больших размеров, содержащие дефекты-рассеиватели электронов и находящиеся при  $T \neq 0$ .

2) Когда такое пространственное распределение плотности вихревого тока существует только в переменном поле, говорят, что имеет место скин-эффект. Если же распределенный таким образом вихревой ток не затухает даже в стационарном магнитном поле (после окончания переходного процесса включения поля), говорят, что возникает стационарный эффект Майснера-Оксенфельда. Поскольку после окончания процесса включения магнитного поля исчезает поле электрическое, возникший вихревой ток не будет затухать только при отсутствии у металла электросопротивления.

3) Имеется в виду, что образец можно разбить на множество элементов одинакового и притом достаточно малого объема.

2. Диамагнитная реакция идеального нормального металла — идеально чистого и находящегося при  $T = 0$  — совершенно не похожа на диамагнитную реакцию как реального нормального металла, так и сверхпроводника. Если считать, что в идеальном нормальном металле (электросопротивление в нем отсутствует) электроны проводимости образуют коллектив свободных частиц, каждая из которых обладает своей средней по времени скоростью, то реакцией такого коллектива на включение магнитного поля будет возникновение чисто поверхностного тока<sup>1)</sup>.

Напомним, что хотя в идеальном нормальном металле каждый из электронов взаимодействует с идеально-периодическим электростатическим полем ионов кристалла, участие в таком взаимодействии не мешает считать электроны зоны проводимости свободными и обязательно придает каждому из них свою, вполне определенную среднюю по времени скорость. Причина в том, что все состояния — это состояния с определенными различными средними по времени скоростями<sup>2)</sup>. Тогда принцип запрета Паули автоматически приводит к упорядоченному выше распределению по скоростям<sup>3)</sup>. Заметим, что электроны считаются свободными в том смысле, что не взаимодействуют ни с решеткой ионов, ни друг с другом.

Из выводов (1) и (2) нетрудно заключить следующее:

а) сопоставляя диамагнитную реакцию идеального нормального металла с реакцией реальных металлов, — как нормального, так и сверхпроводящего, — легко прийти к заключению, что в двух последних каждый электрон (способный внести вклад в ток) должен участвовать еще в каком-то взаимодействии. Оно столь специфично, что, не мешая электронам перемещаться по кристаллу (например, в

1) Это и есть диамагнетизм Ландау.

2) Далее, простоты ради, будет считать, что имеется только одна параболическая разрешенная зона проводимости, и что полная энергия электрона совпадает с кинетической. В последнем случае средняя по времени скорость ( $\bar{V}$ ) совпадает с мгновенной, и следовательно

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{кин}} = \frac{m \cdot (\bar{V})^2}{2}.$$

Таким образом состояние электрона полностью характеризуется значением вектора  $\bar{V}$  и его направлением.

3) Свободные тождественные фермионы (в частности, электроны) распределены по скоростям в соответствии с принципом запрета Паули: в одном состоянии со скоростью  $\bar{V}$  может находиться не более одного фермиона (или двух, но с антипараллельными спинами, то есть нетождественных друг другу частиц).

результате внешнего возмущения), придает каждому из них одинаковую (по крайней мере в отсутствие следов внешних возмущений) среднюю по времени скорость;

б) характер диамагнитной реакции идеально чистых нормального и сверхпроводящего металла, находящихся при  $T = 0$ , указывает на то, что электроны проводимости идеального сверхпроводника также участвуют в вышеупомянутом специфическом взаимодействии. Тот факт, что введения дефектов в ранее идеально чистый нормальный металл (даже при  $T = 0$ ) достаточно для резкого изменения характера диамагнитной реакции, означает, что специфическое взаимодействие, которое, не мешая электронам перемещаться, приводит к одинаковости их скоростей, сводится в реальном нормальном металле к рассеиванию его электронов на дефектах. Следовательно, в идеальном чистом сверхпроводнике упомянутое взаимодействие имеет совершенно иную природу.

В дальнейшем будем иногда пользоваться несколько условной терминологией, различая электроны:

- совершенно свободные (взаимодействующие только с идеально-периодическим электростатическим полем кристалла);
- блуждающие (отличающиеся от первых тем, что они еще время от времени рассеиваются на дефектах);
- сверхпроводящие (отличающиеся от совершенно свободных тем, что взаимодействуют еще с неким внутренним силовым полем).

Подытоживая все вышеперечисленные выводы, можно сформулировать задачи, которые предстоит решать.

1. Установить, каким должно быть определение средней (по времени) скорости отдельного электрона, чтобы оно оказалось в равной степени удовлетворительным и для электрона, рассеивающегося на дефектах, и для электрона, взаимодействующего с неким внутренним силовым полем в сверхпроводнике.

2. Выяснить, какими свойствами должны обладать внутренние силовые поля как в реальном нормальном металле (поле дефектов), так и идеально чистом, находящемся при  $T = 0$  сверхпроводнике, если, взаимодействуя с подобными полями, каждый электрон приобретает нулевую среднюю скорость<sup>1)</sup>, но не теряет способности перемещаться внутри металла<sup>2)</sup>.

1) Нулевую — при отсутствии внешних возмущений или их последствий.

2) Перемещение в реальном нормальном металле происходит при постоянно действующей силе, необходимой для преодоления "трения". Перемещение в сверхпроводнике происходит без усилий (после начального толчка).

### 2.1.2. Реакция на включение электрического поля

Второе из обстоятельств, упоминавшихся в начале §2.1, связано с тем, что и после перехода металла из нормальной фазы в сверхпроводящую дефекты, на которых рассеивались электроны, остаются все “на своих местах”. Поэтому сверхпроводящие электроны сталкиваются с дефектами с той же частотой, с какой — электроны металла, пребывающего в нормальной фазе. Тем не менее, если вызвать ток в сверхпроводнике, то он затем уже не изменяется во времени (не затухает), хотя вызвавшее его электрическое поле исчезает.

Простейший анализ явления электропроводности приводит к следующим выводам.

1. Если образец идеального нормального металла является элементом цепи, в которой помимо идеального источника постоянной ЭДС<sup>1)</sup> присутствует еще и резистор, то после возникновения в образце (и во всей цепи) тока последний затем не меняется во времени<sup>2)</sup>, хотя электрическое поле в образце затухает. Если же цепь состоит из идеального источника ЭДС и образца идеального металла, поле в образце остается постоянным, а ток непрерывно нарастает.

2. Если организовать цепь из идеального источника ЭДС и образца реального нормального металла, то возникший ток затем перестает изменяться во времени, несмотря на постоянное присутствие поля. Так происходит потому, что в установившемся режиме взаимодействие электронов с дефектами систематически восстанавливает степень заполнения каждого  $\vec{V}$ -состояния, столь же систематически нарушаемую электрическим полем.

Сопоставляя сделанные выводы, легко прийти к заключению, что в реальном сверхпроводнике (содержащем дефекты) после того, как вызвавшее ток внешнее поле исчезнет, ток не изменяется во времени (не затухает) только потому, что специфическое взаимодействие электронов с неким силовым полем в сверхпроводнике систематически восстанавливает степень заполнения каждого  $\vec{V}$ -состояния, нарушаемую из-за столкновений электронов с дефектами.

1) Внутреннее электросопротивление идеального источника ЭДС считается равным нулю.

2) Установившееся значение тока в такой цепи зависит только от величины ЭДС и сопротивления резистора.

Таким образом, необходимо дать ответ на следующие вопросы.

1. Существует ли условие ликвидации последствий нарушения степени заполнения  $\vec{V}$ -состояний и зависит ли такое условие от специфики механизма нарушения?

2. В чем именно состоит восстанавливающаяся степень заполнения вследствие внутреннего силового поля в сверхпроводнике и какие в связи с этим свойства должны быть приписаны подобному полю?

3. Не окажутся ли вдруг несовместимыми свойства силового поля, благодаря которым должен возникнуть эффект восстановления, и те свойства, благодаря которым должна становиться равной нулю средняя скорость каждого взаимодействующего с полем электрона?

## §2.2. Распределение электронов по состояниям в пространстве скоростей

### 2.2.1. Степень заполнения $\vec{V}$ -состояния

Все электроны проводимости являются совершенно тождественными друг другу частицами, и потому словосочетание “этот электрон” физически бессодержательно. Напротив, “состояние с определенной скоростью” имеет совершенно строгий смысл, так как все скорости из бесконечно большого их множества отличаются либо по модулю, либо по направлению, либо по обоим признакам. Сопоставляя неразличимость всех электронов с различимостью всех  $\vec{V}$ -состояний, можно утверждать строго лишь то, что в определенном  $\vec{V}$ -состоянии в момент времени  $t$  находится один электрон или же это состояние свободно<sup>1)</sup>.

Мгновенной степенью заполнения ( $\tilde{n}$ ) будем называть число частиц, находящихся в момент времени  $t$  в  $\vec{V}$ -состоянии. При заполнении  $\vec{V}$ -пространства совершенно свободными частицами

$$\tilde{n}(\vec{V}) = \begin{cases} \text{либо } 1 \text{ постоянно во времени,} \\ \text{либо } 0 \text{ постоянно во времени.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Если же все частицы сталкиваются, например, друг с другом и с термостатом (при  $T \neq 0$ ), то не существует такого  $\vec{V}$ -состояния, для которого было бы справедливо соотношение (2.1).

<sup>1)</sup> Удвоив число состояний, мы далее не будем включать спин в число признаков себестождественности частиц.

Теперь заметим, что если в  $\vec{V}$ -пространстве выделить очень тонкий сферический слой (толщиной  $dV$ , но отличного от нуля среднего радиуса, например,  $V_F$ ), то можно считать, что всем, входящим в него векторам  $\vec{V}$ , отвечает одинаковая энергия  $E (= \frac{m V^2}{2})$  (рис. 2.1)<sup>1)</sup>.

Иначе говоря, хотя одному состоянию со скоростью  $\vec{V}$  отвечает также одно состояние с энергией  $E$ , тем не менее одному значению  $E$  отвечает множество разных  $\vec{V}$ -состояний (например, если  $E = \frac{m \cdot V^2}{2}$ ). Это обстоятельство позволяет ввести такое определение степени заполнения одного состояния с энергией  $E$ :

$$\tilde{N}(E) = \frac{\left( \begin{array}{l} \text{число разных (с одинаковой энергией } E) \\ \vec{V}\text{-состояний, занятых частицами} \end{array} \right)}{\left( \text{число этих } \vec{V}\text{-состояний} \right)}$$

Подобное определение равносильно усреднению величины по числу состояний:

$$\tilde{N}(E) \equiv \langle \tilde{N}(E) \rangle_{\text{число состояний}}$$

Подчеркнем, однако, что если множество частиц находится в термодинамическом равновесии друг с другом и с термостатом, справедливо утверждать, что в любой момент времени с равной вероятностью в любом из множества  $\vec{V}$ -состояний с одинаковой энергией может находиться частица. Естественно, при термодинамическом равновесии величина  $\tilde{N}(E)$  не зависит от времени.

Пусть  $T \neq 0$ , так что  $0 < \tilde{N}(E) < 1$ . Поскольку  $\tilde{N}(E)$  — степень заполнения одного состояния, совершенно очевидно, что для любого  $\vec{V}$ -состояния с энергией  $E$  при термодинамической равновесии и  $T \neq 0$ :

$$\tilde{N}(E) = \tilde{N}(V) = \tilde{N}(\vec{V}), \text{ и следовательно, } 0 < \tilde{N}(\vec{V}) < 1.$$

Но ведь величина  $\tilde{N}(\vec{V})$  не может быть результатом усреднения по числу разных  $\vec{V}$ -состояний с одинаковой скоростью  $\vec{V}$ . Это абсурд!

<sup>1)</sup> Такие состояния отличаются только направлением скорости.



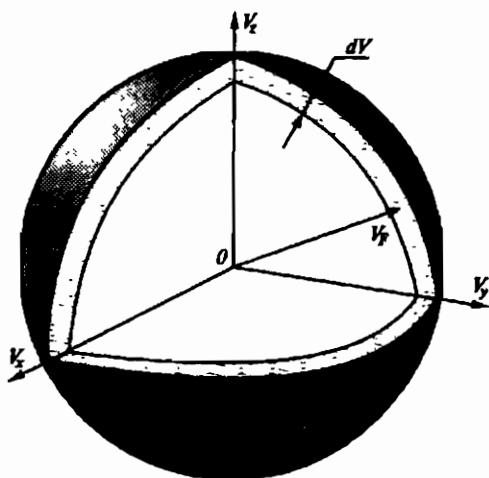


Рис. 2.1. Сферический слой в  $\vec{V}$ -пространстве:

число разных  $\vec{V}$ -состояний (с практически одинаковой во всех них энергией) в слое радиуса  $V_F$  и

толщины  $dV$  равно  $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{m}{\pi \cdot \hbar}\right)^3 \cdot 4\pi V_F^2 \cdot dV$

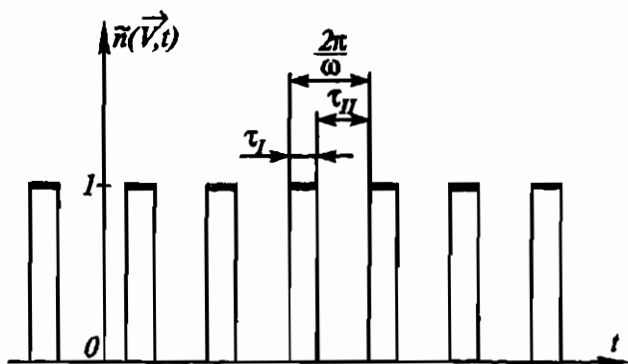


Рис. 2.2 Пример зависимости  $\bar{n}(\vec{V}, t)$ :

$\omega$  — “частота” следования,  $\left(\frac{\tau_{II}}{\tau_I}\right)$  — “скважность”

Тогда остается лишь одна возможность согласовать три соотношения:

$$0 < \tilde{N}(E) < 1, \quad \tilde{N}(\vec{V}) = \tilde{N}(E), \quad 0 < \tilde{N}(\vec{V}) < 1 -$$

это считать, что частица то возникает в одном  $\vec{V}$ -состоянии, то исчезает из него. В свою очередь это означает необходимость рассматривать величину  $\tilde{N}(\vec{V})$  в качестве усредненной по времени:

$$\tilde{N}(\vec{V}) \equiv \langle \tilde{N}(\vec{V}) \rangle_{\Delta t \rightarrow \infty} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \tilde{n}(\vec{V}, t) \cdot dt \right\}, \quad (2.2)$$

где в соответствии с принципом запрета (Паули) для любой  $\vec{V}$ :

$$\tilde{n}(\vec{V}, t) = \begin{cases} \text{то } 1, & 1) \\ \text{то } 0, & \end{cases}$$

Использование скорости  $\vec{V}$  в качестве аргумента функции означает, что разным  $\vec{V}$  отвечает разный характер колебаний величины  $\tilde{n}$ .

Именно величину  $\langle \tilde{N}(\vec{V}) \rangle_{\Delta t \rightarrow \infty}$  и следует считать стационарной степенью заполнения состояния со скоростью  $\vec{V}$ . (На рис. 2.2 представлен пример зависимости  $\tilde{n}(\vec{V}, t)$ , причем “частота следования” и “скважность” считаются обусловленными участием электронов в некоем взаимодействии).

Таким образом, соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \tilde{N}(\vec{V}_i) < 1, \\ \sum_i \tilde{N}(\vec{V}_i) \geq 1 \end{array} \right\} \text{ в } I\text{-области } \vec{V}\text{-пространства} \quad (2.3)$$

означают, что в среднем по времени существует  $\sum_i \tilde{N}(\vec{V}_i)$  фермионов (электронов), ни один из которых не является совершенно свободным и не существует совершенно свободных фермионов со скоростями  $\vec{V}_i$ , принадлежащими  $I$ -области  $\vec{V}$ -пространства.

1) Здесь по существу вводится (в скрытой форме) предположение о возможности сконструировать одно состояние частицы, не являющейся совершенно свободной, из множества состояний совершенно свободной частицы.

Соотношение

$$\bar{N}(\vec{V}) = 1 \quad \text{в } J\text{-области } \vec{V}\text{-пространства} \quad (2.4)$$

означает, что постоянно существует целое число совершенно свободных фермионов, каждый из которых обладает своей скоростью, и не существует никаких других фермионов со скоростями, принадлежащими  $J$ -области  $\vec{V}$ -пространства.

### 2.2.2. Квазистационарная степень заполнения $\vec{V}$ -состояния

Величину  $\bar{N}(\vec{V})$ , определенную соотношением (2.2), строго говоря, нельзя использовать для описания переходных процессов, сколь бы медленно они не протекали. Поэтому для практических целей необходимо ввести понятие о квазистационарной величине:

$$\left( \frac{1}{\Delta t_*} \cdot \int_{t' - \frac{\Delta t_*}{2}}^{t' + \frac{\Delta t_*}{2}} \bar{n}(\vec{V}, t) \cdot dt \right) \equiv \bar{N}(\vec{V}, t'). \quad (2.5)$$

Подчеркнем, что вводить процедуру усреднения по времени имеет смысл только, если  $\bar{n}(\vec{V})$  колеблется, и стало быть:

$$0 < \bar{N}(\vec{V}, t') < 1.$$

Говорить о неизменности или изменении во времени величины  $\bar{N}(\vec{V}, t')$ , введенной соотношением (2.5), уже допустимо, поскольку появилась возможность сдвигать момент  $t'$  вдоль оси времени. Что же касается интервала усреднения  $\Delta t_*$ , то он должен быть, конечно, гораздо большим, чем “период” колебаний величины  $\bar{n}(\vec{V})$ <sup>1)</sup>.

Теперь выясним, при каких условиях допустимо считать изменение квазистационарной степени заполнения  $\bar{N}(\vec{V})$  во времени непрерывным.

<sup>1)</sup> Колебания величины  $\bar{n}(\vec{V})$  совсем не обязательно должны быть идеально периодическими.

Прежде всего заметим, что если рассматривать  $\vec{V}$ -пространство как самостоятельный объект<sup>1)</sup>, не подверженный действию внешнего возмущения, последнему остается влиять только на характер колебаний величины  $\tilde{n}(\vec{V})$ . Поэтому мгновенное возникновение возмущения или столь же мгновенное его изменение вызовут изменение в величине  $\tilde{N}(\vec{V})$  лишь спустя какое-то время.

Пусть возмущение, возникнув мгновенно, затем не меняется вообще. Только очевидно, что можно выбрать такой интервал  $\Delta t_0$ , за который сколько-нибудь существенного изменения величины  $\tilde{N}(\vec{V})$  не произойдет:

$$[\tilde{N}(\vec{V}, t_{j+1}) - \tilde{N}(\vec{V}, t_{j-1})] \ll \tilde{N}(\vec{V}, t_j), \quad (2.6)$$

где  $t_{j-1}$ ,  $t_j$ ,  $t_{j+1}$  — середины трех соседних интервалов, причем конец  $(j-1)$ -го интервала отделен от начала  $(j+1)$ -го интервала промежутком времени  $\Delta t_0$ .

Если неравенство (2.6) справедливо, промежуток  $\Delta t_0$  может выступать в роли “момента” на бесконечно протяженной оси  $t$ , а величина

$$\frac{\tilde{N}(\vec{V}, t_{j+1}) - \tilde{N}(\vec{V}, t_{j-1})}{\Delta t_0}$$

в роли производной

$$\left. \frac{d\tilde{N}(\vec{V}, t)}{dt} \right|_{t=t_j}$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда внешнее возмущение  $B$  колеблется с частотой  $\omega_0$ :

$$B = B_0 \cdot \sin \omega_0 \cdot t,$$

Допустимо ли считать величину  $\tilde{N}(\vec{V}, t)$  меняющейся во времени (под действием возмущения) непрерывно? Иными словами — считать, что возмущение влияет не на характер колебаний величины  $\tilde{n}(\vec{V})$ , а непосредственно на численное значение  $\tilde{N}(\vec{V}, t)$ .

<sup>1)</sup> То есть существующий независимо от существования частиц. Когда частица возникает, то — в одном из множества элементарных объемов  $\vec{V}$ -пространства.

Предположим, что это так, и пусть простоты ради:

$$\frac{d\tilde{N}(\vec{V}, t)}{dt} = K \cdot \frac{dB}{dt} = (K \cdot B_0 \cdot \cos \omega_b \cdot t) \cdot \omega_b, \quad (2.7)$$

где  $K$  — некоторый коэффициент пропорциональности.

Из выражения (2.7) следует, что максимальная быстрота изменения обеих величин —  $\tilde{N}(\vec{V}, t)$ , и  $B$  — одинаковым образом зависят от  $\omega_b$ . Разумеется, в этом случае интервал времени  $\Delta t_0$ , на котором производится усреднение  $\tilde{n}(\vec{V}, t)$ , должен быть гораздо меньшим, чем  $(2\pi/\omega_b)$ :

$$\Delta t_0 \ll \frac{2\pi}{\omega_b}.$$

Тем не менее интервал  $\Delta t_0$  должен быть все же настолько велик, чтобы определение степени заполнения  $\tilde{N}(\vec{V}, t)$  как квазистационарной не потеряло смысла. Если ввести представление о “частоте” ( $\omega_0$ ) колебаний величины  $\tilde{n}(\vec{V}, t)$ , обусловленной внутренним эффектом<sup>1)</sup>, то названные выше ограничения на продолжительность интервала можно выразить соотношением

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll \Delta t_0 \ll \frac{2\pi}{\omega_b}. \quad (2.8)$$

Легко понять, что уже при  $\omega_0 < \omega_b < 10 \omega_0$  не существует интервала, удовлетворяющего двойному неравенству (2.8).

## §2.3. Плотность тока

### 2.3.1. Определение плотности постоянного тока

В хорошо известном соотношении (закон Ома)

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.9)$$

векторы плотности тока ( $\vec{J}$ ) и напряженности поля ( $\vec{E}$ ) относятся к одной точке токопроводящей среды, удельная электропроводность которой в той же точке есть  $\sigma$ . Поэтому все величины в формуле (2.9) можно назвать локальными.

<sup>1)</sup> Действующим и в отсутствие возмущения.

Однако для описания переходных процессов выражение (2.9) непригодно, ибо при его выводе предполагалось, что ни поле, ни ток во времени никогда не изменялись. Для описания переходных процессов следует использовать определение

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = q \cdot n(\vec{r}) \cdot \vec{V}_{др}(\vec{r}, t), \quad (2.10)$$

где  $q$  — заряд электрона;  $n(\vec{r})$  — локальная концентрация электронов;  $\vec{V}_{др}(\vec{r}, t)$  — величина, называемая их дрейфовой скоростью, которая очевидно должна быть тоже ...локальной. Но что может означать локальность по отношению к скорости? В связи с этим напомним, что выражение (2.10) выводится из исходного с помощью предельного перехода

$$\Delta v(\vec{r}) \rightarrow 0,$$

где  $\Delta v(\vec{r})$  — элемент объема, радиус-вектор центра которого равен  $\vec{r}$ .

Исходных выражений два.

### 2.3.1.1. Первое исходное выражение для плотности тока<sup>1)</sup>

Рассмотрим выражение

$$\vec{J}(\vec{r}) = q \cdot \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left( \frac{\sum_{i=1}^{N[\Delta v(\vec{r})]} \vec{v}_i}{\Delta v(\vec{r})} \right), \quad (2.11)$$

где  $N[\Delta v(\vec{r})]$  — число входящих в элемент объема электронов, каждый из которых, быть может, обладает своей (отличной от других) скоростью.

Чтобы перейти от выражения (2.11) к (2.10), нужно дать определенные величинам  $n$  и  $\vec{V}_{др}$ .

<sup>1)</sup> Так как выражение (2.10) справедливо и в стационарном состоянии, то, чтобы не отягощать дальнейший анализ громоздкими выкладками, дальше будем рассматривать только стационарное состояние. Поэтому в последующих формулах опустим время, которое могло бы выступать в качестве еще одного аргумента величин  $\vec{J}$  и  $\vec{V}_{др}$ .

## 2.3.1.2. Определение понятия "концентрация электронов проводимости"

На первый взгляд, дать физически содержательное определение концентрации частиц как величины локальной совсем не трудно:

$$n(\vec{r}) \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left( \frac{N[\Delta v(\vec{r})]}{\Delta v(\vec{r})} \right). \quad (2.12)$$

Тем не менее определение (2.12) еще только логически содержательно. Оно не конструктивно, ибо нельзя установить, сколько пусть даже точечных частиц вмещает объем, стягивающийся в точку. Чтобы сделать определение конструктивным, придется сначала ввести предположение об однородном распределении величины  $n(\vec{r})$  по всему сколь угодно большому образцу металла<sup>1)</sup>:

$$n(\vec{r}) = n_{\text{локальн}}, \quad (2.13)$$

где индекс "локальн" служит признаком независимости  $n$  от  $\vec{r}$ . Тогда, учитывая, что  $n_{\text{локальн}} \cdot d^3 \vec{r} = dN$ , где  $dN$  — число частиц в объеме  $d^3 \vec{r}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{v} \cdot \int_v n(\vec{r}) \cdot d^3 \vec{r} \right\} = \\ = \begin{cases} \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{v} \cdot \int_{N(v)} dN \right\} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{N(v)}{v} \right) \equiv \langle n \rangle_{v \rightarrow \infty}, \\ n_{\text{локальн}} \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{v} \cdot \int_v d^3 \vec{r} \right\} = n_{\text{локальн}}, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда следует, что  $n_{\text{локальн}} = \langle n \rangle_{v \rightarrow \infty}$ . Величину же, усредненную по большому объему, рассчитать или измерить уже возможно.

Подчеркнем, что предположение (2.13) можно обосновать. В металле пространственные флуктуации концентрации электронов очень малы, поскольку, не успев нарасти, быстро рассасываются

<sup>1)</sup> Предположение о зависимости величины  $n$  от  $\vec{r}$  допустимо, поскольку логически содержательное определение величины  $n$  уже дано соотношением (2.12).

автоматически возникающими дрейфовыми и диффузионными потоками<sup>1)</sup>.

Таким образом, физически содержательное определение локальной концентрации электронов существует, хотя и выглядит удивительно:

$$n_{\text{локальн}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( \frac{N(\nu)}{\nu} \right). \quad (2.14)$$

Заметим, что  $n_{\text{локальн}}$  отлична от нуля только, если при  $\nu \rightarrow \infty$  и величина  $N(\nu) \rightarrow \infty$ .

### 2.3.1.3. Определение понятия "средняя скорость частицы"

Перейдем к величине  $\vec{V}_{\text{др}}(\vec{r})$ . Умножив и разделив правую часть выражения (2.11) на  $n_{\text{локальн}}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}) &= q \cdot n_{\text{локальн}} \cdot \lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N[\Delta\nu(\vec{r})]} \vec{v}_i}{n_{\text{локальн}} \cdot \Delta\nu(\vec{r})} = \\ &= q \cdot n_{\text{локальн}} \cdot \lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N[\Delta\nu(\vec{r})]} \vec{v}_i}{N[\Delta\nu(\vec{r})]}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\vec{V}_{\text{др}}(\vec{r}) = \lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N[\Delta\nu(\vec{r})]} \vec{v}_i}{N[\Delta\nu(\vec{r})]}. \quad (2.15)$$

Допустим, что электроны проводимости металла являются (все!) совершенно свободными частицами. Предположим даже, что

<sup>1)</sup> Дрейфовые потоки возникают из-за того, что пространственная флуктуация величины  $n$  сопровождается нарушением локальной электронейтральности. Заметим, что в металле диффузионная длина электронов совпадает с длиной экранирования возникающего заряда и очень мала ( $= 3 \cdot 10^{-8}$  см). Максвелловское время релаксации в металле фантастически мало:  $\tau_{\text{максв}} = 10^{-19}$  с при  $T = 300$  К.



какое-то время в металле существовало поле, но и после его исчезновения электроны, вновь ставшие совершенно свободными, участвуют в электрическом токе, так что  $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$ . Какой может быть

$$N_{\{\Delta v(\vec{r})\}}$$

величина  $\sum_{i=1} \vec{v}_i$  в "точке", радиус-вектор которой есть именно

$\vec{r}$ ? С равной вероятностью — какой угодно по направлению и практически какой угодно по величине<sup>1)</sup>. Ибо с равной вероятностью в любой момент времени может находиться в любой точке металла любой совершенно свободный электрон ("любой" означает — с любой скоростью). А поскольку их — множество, и все — с разными скоростями, определение (2.15) лишается конструктивности: сумма каких угодно векторов есть какой угодно вектор.

Если же попытаться ввести конструктивное определение, приравняв

$$\vec{v}_{др} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^{N(v)} \vec{v}_i}{N(v)} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^N \vec{v}_i}{N} \right),$$

то ни о какой локальности величины  $\vec{v}_{др}$  не может быть и речи.

Таким образом, мы приходим к очень важному выводу о несовместимости понятия локальной плотности тока с представлением о коллективе совершенно свободных электронов.

Тем не менее подчеркнем, что сама величина  $\vec{v}_i$  (средняя по времени скорость отдельного совершенно свободного электрона) определена физически содержательным образом:

$$\vec{v}_i = \left. \frac{dE_{\text{полн}}}{d\vec{P}} \right|_{E_{\text{полн},i}}, \quad (2.16)$$

где  $E_{\text{полн}}$  и  $\vec{P}$  — полная энергия и импульс электрона кристалла. Для конкретного кристалла зависимость  $E(\vec{P})$  существует и устанавли-

1) Максимальное значение скорости в коллективе совершенно свободных электронов, связанное с энергией Ферми соотношением  $\frac{m V_{\text{макс}}^2}{2} = F$ , очень велико:  $V_{\text{макс}} = 10^8$  см/с.

вается при решении стационарного одночастичного уравнения Шредингера:

$$\hat{H} |\Psi_i\rangle = E_{\text{полн},i} |\Psi_i\rangle,$$

где  $\hat{H}$  и  $|\Psi_i\rangle$  — гамильтониан и вектор состояния, отвечающий  $i$ -му собственному значению оператора  $\hat{H}$ <sup>1)</sup>.

Допустим теперь, что электроны проводимости металла образуют коллектив частиц, которые хотя и могут свободно перемещаться по образцу, но участвуют еще в некоем взаимодействии, благодаря которому средняя скорость каждой частицы оказывается одинаковой. Отсюда следует, что в числителе правой части выражения (2.15):

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_i = \dots = \vec{v}_N \equiv \vec{v}_{(1)}. \quad (2.17,а)$$

А поскольку все  $N$  частиц входят в объем  $\Delta v(\vec{r})$ , то и

$$\vec{v}_{(1)} \rightarrow \vec{V}_{(1)}(\vec{r}). \quad (2.17,б)$$

(Далее символом  $\vec{V}_{(1)}$  будем обозначать скорость отдельной частицы только такого коллектива, каждая из частиц которого обладает одинаковой скоростью).

Приняв условия (2.17), автоматически приходим к выражению

$$\vec{j}(\vec{r}) = q \cdot n_{\text{локальн}} \cdot \vec{V}_{(1)}(\vec{r}). \quad (2.18)$$

Таким образом, существование физически содержательного определения локальной плотности тока для столь специфического электронного коллектива полностью зависит от того, существует ли физически содержательное определение скорости  $\vec{V}_{(1)}$  отдельного электрона упомянутого коллектива. Пока мы лишь предположили, что такое определение скорости существует.

Сделаем теперь терминологическое замечание.

Выражение

$$\vec{j}(\vec{r}) = n_{\text{лок}} \cdot \vec{V}_{(1)}(\vec{r}),$$

где  $\vec{j}(\vec{r})$  — локальная плотность потока вещества, хорошо известно в гидродинамике сплошной среды, все частички которой хотя и

<sup>1)</sup> В идеально-периодическом электростатическом поле, в котором только и могут электроны кристалла считаться совершенно свободными, энергия  $E_{\text{полн}}$  является периодической функцией импульса в пределах каждой разрешенной энергетической зоны.

могут свободно перемешаться в любом направлении, но сильно взаимодействуют друг с другом. Поэтому, естественно, каждая из них, входящих по крайней мере в очень небольшой объем, обладает одинаковой средней по времени скоростью. В достаточно хорошем для описания многих явлений приближении можно считать, что концентрация частиц жидкости однородно распределена по всему объему жидкости, а все частички покоящейся жидкости обладают одинаковой и равной нулю средней скоростью. В текущей жидкости  $\vec{V}_{(1)} \neq 0$ , причем может появиться и зависимость  $\vec{V}_{(1)}$  от  $\vec{r}$ .

С учетом сделанного замечания имеет смысл назвать выражение (2.18) гидродинамическим определением плотности тока, причем:

$$\vec{V}_{(1)}(\vec{r}) \begin{cases} = 0 & \text{для всех } \vec{r} \text{ в отсутствие следов внешнего} \\ & \text{возмущения,} \\ \neq 0 & \text{и может зависеть от } \vec{r} \text{ в результате действия} \\ & \text{внешнего возмущения.} \end{cases}$$

Следующее замечание необходимо сделать в связи с намерением использовать определение (2.18) для описания переходных процессов. Пример такого процесса — установление тока в пространственно однородном электрическом поле  $\vec{E}$ , которое возникает скачкообразно и затем остается неизменным. В простейшем случае

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = q \cdot n \cdot \frac{d\vec{V}_{(1)}}{dt} = q \cdot n \cdot \frac{1}{m} \cdot \left( q \cdot \vec{E} - \frac{m \cdot \vec{V}_{(1)}}{\tau} \right), \quad (2.19, a)$$

причем:

$$\vec{V}_{(1)}(t=0) = 0, \quad (2.19, b)$$

а  $\left(\frac{1}{\tau}\right)$  — коэффициент, характеризующий силу “сопротивления” токопроводящей среды.

Напомним, что скорость  $\vec{V}_{(1)}$  — это величина, уже усредненная по времени, ибо она “возникла”, как было ранее сказано, в результате участия электрона во взаимодействии, в ходе которого мгновенная скорость электрона, естественно, непрерывно менялась<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В §2.6 будет доказано, что, если концентрация электронов отлична от нуля (число их в бесконечно большом объеме также бесконечно велико), то величина  $\vec{V}_{(1)}$  и не может быть скоростью отдельного электрона, если она не усреднена по времени.

Разумеется, использовать в уравнении (2.19,а) величину  $\vec{V}_{(1)}$  можно, только если она квазистационарная. Но это накладывает ограничения на быстроту изменения внешнего возмущающего фактора. Как будет показано в дальнейшем, для реального нормального металла можно отождествить параметр  $\tau$  с упоминавшимся в п. 2.2.2 интервалом  $\Delta t$ , усреднения на котором достаточно, чтобы рассматривать скорость  $\vec{V}_{(1)}$  в качестве квазистационарной.

Если электрическое поле, например, колеблется с частотой  $\omega_E$ , допустимо считать, что оно меняет именно квазистационарную (а не истинно мгновенную) скорость, только при условии

$$\omega_E \cdot \tau \ll 2\pi.$$

Наконец, последнее замечание следует сделать в связи с описанием явлений, в которых плотность тока неоднородно распределена по образцу (например, скин-эффект, эффект Майснера-Оксенфельда). В этих случаях принципиально невозможно использовать понятие ток вместо плотности тока, то есть невозможно обойтись без привлечения понятия  $\vec{V}_{(1)}$ , определенного, например, соотношением (2.18).

Имеет смысл напомнить, что эффекты, возникающие в коллективе совершенно свободных электронов, не требуют привлечения понятия плотности тока.

#### 2.3.1.4. Второе исходное выражение для плотности тока

Помимо выражения (2.11) можно взять в качестве исходного и такое:

$$\vec{J}(\vec{\mathcal{P}}) = q \cdot \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left( \frac{\sum_{i=1}^{M[\Delta v(\vec{\mathcal{P}})]} \vec{V}_i \cdot \tilde{N}(\vec{V}_i)}{\Delta v(\vec{\mathcal{P}})} \right), \quad (2.20)$$

где  $M$  — число состояний (с разными скоростями), входящих в объем  $\Delta v(\vec{\mathcal{P}})$ , а  $\tilde{N}(\vec{V}_i)$  — квазистационарная (или стационарная) степень заполнения  $\vec{V}_i$ -состояния электроном.

Выражение (2.20) можно преобразовать к привычному виду, используя введенное ранее определение локальной концентрации электронов, но в связи с этим придется сделать небольшое отступление.

В п. 2.2.2 уже говорилось, что  $\vec{V}$ -пространство выступает в роли самостоятельного объекта, в элементарных ячейках которого возникают частицы. Для дальнейшего достаточно иметь в виду, что элементарные ячейки  $\vec{V}$ -пространства все разные. Они-то и называются состояниями с разными скоростями. Что же касается геометрического пространства  $\{x, y, z\}$ , то все его элементарные ячейки абсолютно тождественны. Поэтому физически бессодержательно утверждение “частица, обладающая определенной скоростью, находится в этой пространственной ячейке<sup>1)</sup>”, равно как и эквивалентное утверждение, что “состояние с определенной скоростью  $\vec{V}$  находится в этой пространственной ячейке”. Примером правильного является утверждение: “состояние с определенной скоростью  $\vec{V}$  с равной вероятностью в любой момент времени может находиться в любой из множества пространственных ячеек”.

Таким образом, очевидно, что придется поступить точно так же, как в п. 2.3.1.2, придавая логически содержательному понятию локальной концентрации еще и конструктивность с помощью соотношения

$$n_{\text{локальн}} = \langle n \rangle_{v \rightarrow \infty} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^{(v/v_0)} \bar{N}(\vec{V}_i)}{v} \right), \quad (2.21)$$

где  $(v/v_0)$  — число всех вообще  $\vec{V}$ -состояний, находящихся в образце объемом  $v$ , а  $v_0$  — объем элементарной пространственной ячейки.<sup>2)</sup>

Подчеркнем, что величина  $n_{\text{локальн}}$ , определенная соотношением (2.21), оказывается усредненной не только по объему, но и по времени, поскольку усредненной по времени является степень за-

1) Безразлично, постоянно или же только в какой-то момент.

2) Будем считать, что одно  $\vec{V}$ -состояние “содержится” в одной пространственной ячейке.

полнения  $\tilde{N}(\vec{V}_i)$ . Отметим также, что по этой причине число электронов —  $\sum_{i=1}^{(v/v_0)} \tilde{N}(\vec{V}_i)$  — может считаться только средним по времени

вне зависимости от того, оказывается оно целым или нецелым.

Используя определение (2.21) и предположение об однородном распределении концентрации электронов по объему образца, преобразуем выражение (2.20) к виду

$$\vec{J}(\vec{r}) = q \cdot n_{\text{локальн}} \cdot \left\{ \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{M(\Delta v(\vec{r}))} \vec{V}_i \cdot \tilde{N}(\vec{V}_i)}{n_{\text{локальн}} \cdot \Delta v(\vec{r})} \right\}. \quad (2.22)$$

Уже ясно, что величине в фигурных скобках суждено стать скоростью. Поэтому первым делом оценим, будет ли предполагаемое определение конструктивным. Легко видеть, что — нет, причем уже по знакомой причине: в каком бы месте образца не находился объем  $\Delta v$ , в него войдет  $M$ -состояний, но с равной вероятностью любых из бесконечно большого их множества<sup>1)</sup>. Следовательно, вектор

$$\left( \sum_{i=1}^M \vec{V}_i \cdot \tilde{N}(\vec{V}_i) \right)$$

может быть с равной вероятностью каким угодно.

Таким образом выражению (2.22), предназначенному служить определением локальной плотности тока, грозит потеря конструктивности. Избавиться от этой угрозы можно единственным, уже применявшимся способом — перейти к усреднению по объему. То есть предложить, что

$$\vec{J}(\vec{r}) = q \cdot n_{\text{локальн}} \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{(v/v_0)} \vec{V}_i \cdot \tilde{N}(\vec{V}_i)}{n_{\text{локальн}} \cdot v} =$$

1) Предполагается, что объем  $v$  бесконечно велик, и тогда можно выбрать такой объем  $\Delta v$ , чтобы  $v_0 \ll \Delta v \ll v$ .

$$\begin{aligned}
 &= q \cdot n_{\text{локальн}} \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^{(v/v_0)} \vec{V}_i \cdot \vec{N}(\vec{V}_i)}{\sum_{i=1}^{(v/v_0)} \vec{N}(\vec{V}_i)} \right) = \\
 &= q \cdot n_{\text{локальн}} \cdot \left( \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \vec{V}_i \cdot \vec{N}(\vec{V}_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \vec{N}(\vec{V}_i)} \right). \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Конечно, продолжать считать после этого выражение (2.23) определением именно локальной плотности тока можно только, если интерпретировать величину

$$\left( \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \vec{V}_i \cdot \vec{N}(\vec{V}_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \vec{N}(\vec{V}_i)} \right)$$

в качестве (средней по времени) скорости отдельной частицы, одинаковой у каждой из всех тех, что входят в очень небольшой объем<sup>1)</sup>

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \vec{V}_i \cdot \vec{N}(\vec{V}_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \vec{N}(\vec{V}_i)} \equiv \vec{V}_{(1)}. \quad (2.24)$$

<sup>1)</sup> Еще раз напомним, что этот "очень небольшой объем" все же таков, что  $\Delta v \gg v_0$ , иначе статистический метод анализа становится неприемлемым. Если  $v \rightarrow \infty$ , то реализовать неравенство  $v \gg \Delta v \gg v_0$  очень легко.

Подчеркнем, что в левой части выражения (2.24) уже не содержится явно число частиц. Поэтому определение (2.24) как скорости отдельной частицы справедливо для коллектива, состоящего из любого числа частиц, то есть при очень мягком условии:

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}(\vec{V}_i) \right) \geq 1$$

Тем не менее, поскольку понятие концентрации электронов проводимости совместимо только с условием, что  $\left( \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}(\vec{V}_i) \right) \rightarrow \infty$ , именно это последнее и придется использовать при определении скорости  $\vec{V}_{(1)}$ .

Выясним, существуют ли препятствия к интерпретации величины

$$\left( \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \vec{V}_i \cdot \tilde{N}(\vec{V}_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}(\vec{V}_i)} \right)$$

как скорости отдельной частицы.

Если допустить, что

$$\tilde{N}(\vec{V}_i) = \begin{cases} 1 & \text{в одной части } \vec{V}\text{-пространства,} \\ 0 & \text{в остальной части } \vec{V}\text{-пространства,} \end{cases}$$

то мы имеем дело с коллективом совершенно свободных частиц, каждая из которых обладает своей скоростью. Это автоматически исключает возможность вышеназванной интерпретации. Тем самым лишается смысла и понятие плотности тока совершенно свободных электронов как локальной величины.

Рассмотрим другой случай:

$$0 < \tilde{N}(\vec{V}_i) < 1 \quad \text{для любой } \vec{V}.$$

Хотя электроны в этом случае не образуют коллектива совершенно свободных частиц, величина  $\vec{V}_{(1)}$  интерпретируется как скорость



электрона, способного свободно<sup>1)</sup> перемещаться по всему сколь угодно большому объему образца<sup>2)</sup>. Таким образом, чтобы не возникало препятствий для интерпретации (2.24), нужно предположить, что каждый в отдельности электрон<sup>3)</sup> участвует во взаимодействии с таким внутренним полем, которое, не являясь идеально-периодическим электростатическим, тем не менее не препятствует свободному перемещению частицы.

Обратимся сначала к случаю одного электрона. Как следует из определения (2.24), гипотетическое внутреннее поле должно обнаруживаться во всех элементарных ячейках образца, и во всех них, пусть разделенных сколь угодно большим пространственным интервалом, электрон должен взаимодействовать с полем одинаковым образом. Сказанное остается в силе и в случае, когда мы имеем дело с коллективом электронов.

Таким образом, интерпретация (2.24) справедлива, если помимо идеально-периодического электростатического поля каждый электрон проводимости металла взаимодействует еще и с таким силовым полем<sup>4)</sup> которое:

- простирается неограниченно далеко;
- является однородным в крупном масштабе (среднее значение поля одинаково во всех равных “элементарных” объемах ограниченного размера  $\Delta v$ );
- которое тем не менее (либо-либо):
  - а) если оно пространственно идеально-периодическое, то не постоянно во времени (причем меняется во времени не строго периодически);

1) Свободно, но не обязательно без “трения”.

2) Средняя по времени скорость электрона равна нулю и в том случае, когда электрон является “локализованным” (в ограниченной области пространства). Например, электрон, “локализованный” (“связанный”) на примесном центре в полупроводнике.

3) Определение (2.24) справедливо при любом числе частиц, то есть при условии,

$$\text{что } \left( \sum_{i=0}^{\infty} \bar{N}(\vec{V}_i) \geq 1 \right)$$

4) Согласно принципу суперпозиции, результирующее поле можно представить как сумму полей различного происхождения.

б) если оно электростатическое, то пространственно не идеально-периодическое;

в) не является ни пространственно идеально периодическим, ни статическим.

Реально ли существование в металле полей с подобными свойствами?

Подобными свойствами обладают:

а) статическое поле некоторых дефектов (например, ионов примесей, хаотически разбросанных по всему объему образца (при вполне реалистическом предположении об однородном распределении по образцу квазилокальной концентрации дефектов));

б) поле хаотически (во времени) колеблющихся ионов решетки металла (как идеально чистого, так и реального), находящегося в тепловом контакте с нагретым термостатом;

в) после колеблющихся ионов решетки идеально чистого металла, находящегося при  $T = 0^1$ ).

Заметим, что во всех перечисленных полях лишь быстро движущийся электрон не может оказаться "связанным" ("локализованным") в ограниченной области образца и тем самым лишенным возможности свободного перемещения.

Все три поля и любые их комбинации — совершенно реальны. Поэтому можно утверждать, что применительно к реальному же металлу, находящемуся как в нормальной, так и в сверхпроводящей фазе, физически содержательным является именно гидродинамическое определение плотности тока:

$$\vec{J}(\vec{r}) = q \cdot n_{\text{локальн}} \cdot \vec{V}_{(1)}(\vec{r}),$$

в котором присутствуют также физически содержательные понятия:

1) Предположение, что можно пренебречь взаимодействием колеблющихся ионов решетки кристалла с движущимся электроном (возможно, что тоже колеблющимся), известно как адиабатическое приближение. Не пользуясь им, нельзя прийти к зависимости  $E_{\text{полн}}(\vec{r})$  (см. с. 97). Подчеркнем, что если за сверхпроводимость отвечает поле хаотически колеблющихся ионов, то для описания сверхпроводимости нельзя использовать шредингеровское представление.

1) локальной средней по времени концентрации электронов проводимости

$$n_{\text{локальн}} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^{(v/v_0)} \bar{N}(\vec{V}_i) \right\}$$

при условии, что  $n_{\text{локальн}} \neq 0$  (то есть при условии, что при  $v \rightarrow \infty$  и

величина  $\left[ \sum_{i=1}^{(v/v_0)} \bar{N}(\vec{V}_i) \right] \rightarrow \infty$ );

2) локальной средней по времени скорости отдельного электрона:

$$\vec{V}_{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \vec{V}_i \cdot \bar{N}(\vec{V}_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{N}(\vec{V}_i)},$$

при условии, что  $0 < \bar{N}(\vec{V}_i) < 1$ .

Заметим, что, хотя присутствующая во всех соотношениях квазистационарная степень заполнения  $\bar{N}(\vec{V}_i)$  также имеет физически содержательное определение (с помощью выражений (2.5), (2.8)), она выступает сейчас в роли исходного понятия. Поэтому нужно показать, как рассчитать величину  $\bar{N}(\vec{V}_i)$  и в условиях термодинамического равновесия образца с термостатом, и в присутствии внешнего возмущения. Это будет сделано в дальнейшем.

*Примечание.* Еще раз напомним, что интерпретация зависимости величины  $\vec{V}_{(1)}$  от  $\vec{r}$  состоит в том, чтобы считать  $\vec{V}_{(1)}$  скоростью каждой из частиц, входящих в очень малый объем, радиус-вектор центра которого есть  $\vec{r}$ . Однако, даже если в любом из множества равновеликих объемов  $\Delta v(\vec{r})$  число частиц  $\Delta N(\vec{r})$  оказывается одинаковым, это вовсе не означает, что и скорости частиц, входящих в разные равновеликие объемы, тоже должны быть одинаковы. Естественно, однако, считать, что в отсутствие всяких следов внешнего возмущения  $\vec{V}_{(1)} = 0$  во всех элементарных объемах.

### §2.4. Конструктивное определение стационарной степени заполнения $\vec{V}$ -состояния

Вернемся теперь к определению стационарной степени заполнения  $\vec{V}$ -состояния:

$$\tilde{N}(\vec{V}) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \tilde{n}(\vec{V}, t) \cdot dt \right\}. \quad (2.25)$$

Конструктивность этого определения в единственно интересном случае, когда

$$0 < \tilde{N}(\vec{V}) < 1,$$

представляется сомнительной, поскольку никакой функциональной связи между  $\tilde{n}(\vec{V})$  и  $t$  может и не существовать.

Поясним последнее утверждение на примере одной частицы<sup>1)</sup>, движущейся в таком стационарном поле, в котором она ни в каком приближении не является свободной<sup>2)</sup>. Решив стационарное уравнение Шредингера в импульсном представлении, найдем величину  $|\Psi(\vec{V})|^2$ , представляющую собой плотность “распределения частицы” по всем точкам  $\vec{V}$ -пространства<sup>3)</sup>.

Размерность

$$\{|\Psi(\vec{V})|^2\} = \frac{1}{(\text{см}/\text{с})^3}.$$

1) Концентрация частиц “коллектива” в этом случае равна нулю.

2) Примером подобного силового поля является центральное.

3) В более привычном — координатном — представлении решением является волновая функция  $\Psi(\vec{r})$ , причем размерность  $\{|\Psi(\vec{r})|^2\} = \text{см}^{-3}$ . Переход к импульсному представлению происходит следующим образом:

$$\Psi(\vec{V}) = \left( \frac{m}{2\pi \hbar} \right)^{3/2} \int \exp \left( - \frac{\sqrt{-1} \cdot m \cdot \vec{V} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right) \cdot \Psi(\vec{r}) \cdot d^3 \vec{r}.$$

Заметим, что величина  $\{2 \cdot (m/2\pi \hbar)^3\}$  играет роль хорошо известной плотности состояний  $G_{\vec{V}}$  (множитель 2 учитывает кратность состояний по спину).

Вероятность ( $dB$ ) того, что частица, где бы она ни находилась в пространстве, обладает в любой момент времени абсолютным значением скорости в интервале между  $\vec{V}$  и  $\vec{V} + d\vec{V}$ , есть

$$dB = |\Psi(\vec{V})|^2 \cdot dV_x \cdot dV_y \cdot dV_z. \quad (2.26)$$

Согласно правилам статистического усреднения средняя (стационарная) скорость частицы есть

$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\sum \vec{V}_i \cdot B_i}{\sum_{\text{по всем } i} B_i}, \quad 1) \quad (2.27)$$

где  $\vec{V}_i$  выступает в роли мгновенной скорости, а  $\langle \vec{V} \rangle$  — средней по времени.

Можно представить себе, что поскольку частица в разные моменты времени обладает разной скоростью<sup>2)</sup>, стационарная вероятность  $B_i$  — это отношение бесконечно большого числа бесконечно коротких промежутков времени, в которые скорость частицы оказывается в пределах бесконечно малого объема  $\vec{V}$ -пространства с центром в “точке”  $\vec{V}_i$ , к общему числу промежутков времени (тоже бесконечно большому):

$$B_i = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \tilde{n}(\vec{V}_i, t) \cdot dt}{\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \tilde{n}(\vec{V}_i, t) \cdot dt \right\}. \quad (2.28)$$

1) В случае одной частицы  $\sum_{\text{по всем } i} B_i = 1$ .

2) На одном — только этом — основании нельзя считать, что существует определенная зависимость  $\vec{V}$  от  $t$ .

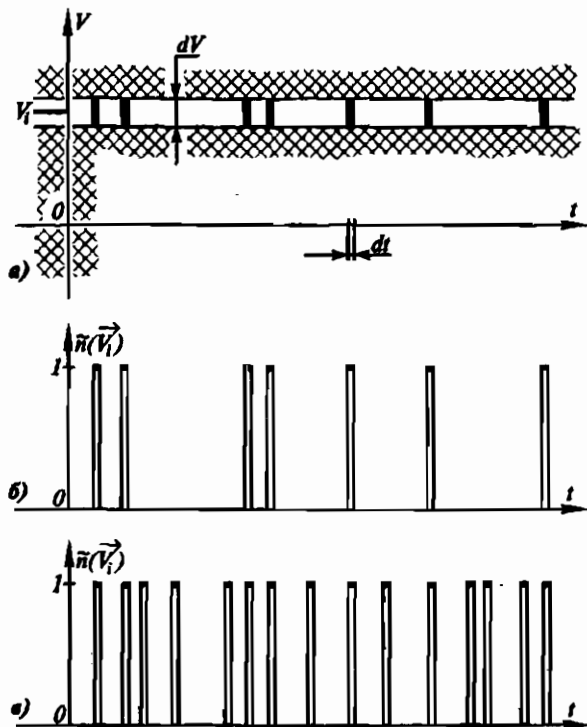


Рис. 2.3. Результаты наблюдений:

*a* — наблюдение за осью скоростей. В узком окне (шириной  $dV$  на высоте  $V_i$ ) частица то появляется (темная полоска) на короткое время ( $dt$ ), то исчезает; *б* — функция-счетчик в присутствии одной частицы; *в* — функция-счетчик в присутствии многих частиц

На рис. 2.3, *a* в символической форме представлены результаты “наблюдений” за одной из ячеек в  $\vec{V}$ -пространстве. На рис. 2.3, *б* представлена функция-счетчик  $\tilde{n}(\vec{V}_i, t)$ , введенная специально для отображения упомянутых результатов в терминах теории вероятностей:

“видно” ( $\tilde{n}_i = 1$ ),

“не видно” ( $\tilde{n}_i = 0$ ).

Подчеркнем, что никакой функциональной связи между  $\vec{v}_i$  и  $t$  не требуется для подсчета величины  $V_i$ .

Подставляя выражение (2.28) в (2.27), получаем:

$$\langle \vec{V} \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^M \vec{V}_i \cdot \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \vec{n}(\vec{V}, t) \cdot dt \right) \right]}{\sum_{i=1}^M \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \vec{n}(\vec{V}, t) \cdot dt \right) \right]}, \quad (2.29)$$

где  $M$  — число “точек” (всех  $\vec{V}$ -состояний)  $\vec{V}$ -пространства.

Естественно назвать величину в квадратных скобках в формуле (2.29) стационарной степенью заполнения одного состояния со скоростью  $\vec{V}_i$ , после чего приходим к уже упоминавшемуся определению средней по времени скорости одной отдельной частицы

$$\langle \vec{V} \rangle \equiv \vec{V}_{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \vec{V}_i \cdot \bar{N}(\vec{V}_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{N}(\vec{V}_i)}.$$

Глядя на рис. 2.3, в легко понять, что увеличение числа частиц сверх одной, если оно сопровождается запретом Паули<sup>1)</sup>, приводит к единственному эффекту — учащению колебаний величины  $\vec{n}(\vec{V}, t)$ . Ведь электроны не различимы, и единственное, что можно сказать, это, что в  $\vec{V}$ -состоянии присутствует электрон или же оно свободно.

<sup>1)</sup> Запрет Паули в данной ситуации сводится к следующему: если в момент времени  $t$  более чем одна частица может с равной вероятностью находиться в одной точке пространства, то в этой точке в этот момент не более чем одна частица может обладать определенной скоростью  $\vec{V}$  (или две, но с антипараллельными спинами).

Итак, можно утверждать следующее:

— средняя по времени степень заполнения одного  $\vec{V}$ -состояния возникает в условиях, когда в этом состоянии вследствие взаимодействия побывает за бесконечно большой промежуток времени каждая из бесконечного множества частиц;

— средняя по времени скорость отдельной частицы возникает из-за того, что она, участвуя во взаимодействии, за бесконечно большой промежуток времени побывает в каждом из бесконечного множества состояний.

В заключение отметим, что коллектив фермионов, находящихся в термодинамическом равновесии с термостатом, можно охарактеризовать функцией  $\tilde{N}(E, T, F)$  — функцией Ферми-Дирака.

$$\tilde{N}(E, T, F) = \left( 1 + e^{\frac{E-F}{k_b \cdot T}} \right)^{-1}.$$

При  $T = 0$ :

$$\tilde{N}(E, F) = \begin{cases} 1 & \text{при } E < F, \\ 0 & \text{при } E > F. \end{cases}$$

Если фермионы, кроме как с термостатом, не взаимодействуют ни с чем, то

$$E = \frac{m \cdot V^2}{2}, \text{ и } \tilde{N}(\vec{V}, T, F) = \tilde{N}(E(\vec{V}), T, F).$$

Хорошо известно также и традиционное приближение, согласно которому такое внешнее возмущение, как слабое статическое потенциально-силовое поле, меняет уровень Ферми, но не меняет температуры. В этом случае

$$\tilde{N}(E, T, F) = \left( 1 + e^{\frac{E-(F+U)}{k_b \cdot T}} \right)^{-1},$$

где  $U$  — энергия взаимодействия одного (каждого) фермиона с упомянутым полем.

Однако, как быть, если силовое поле не является ни потенциальным, ни статистическим? В этом случае следует использовать процедуру расчета величины  $\tilde{N}(\vec{V})$ , основанную на возможности представить полную энергию коллектива взаимодействующих час-



тиц в виде функционала величин  $\tilde{N}_i$ ,  $E_i$ ,  $U_{ij}$  (где  $E_i \equiv E(\vec{V}_i)$ ,  $\tilde{N}_i \equiv \tilde{N}(\vec{V}_i)$ , а  $U_{ij} = U(E_i, E_j)$  — потенциал такого взаимодействия, в результате которого меняются степени заполнения двух  $\vec{V}$ -состояний). В подобном случае можно рассчитать  $\tilde{N}(\vec{V})$  исходя из принципа минимума полной энергии и какого-то дополнительного условия. Последнее в свою очередь можно сформулировать, оперируя таким понятием, как “включение” взаимодействия. Действительно, разумно, например, считать, что в идеально чистом металле при  $T = 0$  в адиабатическом приближении электроны проводимости образуют коллектив совершенно свободных частиц, и потому

$$\tilde{N}(\vec{V}_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 1, 2, \dots, N_0; \\ 0 & \text{при } i > N_0. \end{cases}$$

Так как число совершенно свободных частиц в конечном объеме  $v$  по определению не может флуктуировать во времени, это число — целое. Допустим, что оно известно, и обозначим его  $N_0$ . Если теперь отказаться от адиабатического приближения (после чего возникает неравенство  $0 < \tilde{N}(\vec{V}) < 1$ ), логично считать, что только из-за этого число частиц не изменится. Стало быть, равенство

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^{(v/v_0)} \tilde{N}(\vec{V}_i) \right\} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{N_0}{v} \right) \cdot v \right\} = n_0 \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} v \quad (2.30)$$

вполне пригодно для формулировки дополнительного условия. Тем не менее это равенство ничего не меняет в интерпретации величины  $\sum_{i=1}^{(v/v_0)} \tilde{N}(\vec{V}_i)$ ,

которая для коллектива взаимодействующих частиц является средним по времени числом частиц, около которого флуктуирует мгновенное — целое — число частиц.

Процедура расчета  $\tilde{N}(\vec{V}_i)$  предполагает, что вид зависимости  $E_{\text{полн}}$  от  $\tilde{N}_i$ ,  $E_i$ ,  $U_{ij}$  известен:

$$E_{\text{полн}} = f(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \dots, E_1, E_2, \dots, U_{12}, U_{13}, \dots).$$

1)  $n_0$  — не зависящая от координат (“средняя по объему”) концентрация частиц.



Введем сначала традиционное понятие "плотность состояний в  $\vec{V}$ -пространстве"<sup>1)</sup>:

$$G_{\vec{V}} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ 2 \cdot \frac{\text{Число состояний в элементарном объеме}}{v \cdot \left[ \left( \frac{2\pi \hbar}{m} \right)^3 \cdot \frac{1}{v_0} \right]} \right\} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ 2 \cdot \frac{\left( \frac{v}{v_0} \right)}{\left( \frac{v}{v_0} \right) \cdot \left( \frac{2\pi \hbar}{m} \right)^3} \right\} =$$

$$= \frac{m^3}{4 \pi^3 \hbar^3} \frac{\text{разных состояний}}{\text{см}^3 \cdot \left( \frac{\text{см}}{\text{с}} \right)^3}. \quad (2.32)$$

Используем это понятие для приведения выражений (2.21), (2.24), (2.23) также к традиционным формам:

$$n_{\text{локальн}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}(V_x, V_y, V_z) \cdot G_{\vec{V}} \cdot dV_x \cdot dV_y \cdot dV_z; \quad (2.33)$$

$$V_{(1)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}(V_x, V_y, V_z) \cdot G_{\vec{V}} \cdot dV_x \cdot dV_y \cdot dV_z}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}(V_x, V_y, V_z) \cdot G_{\vec{V}} \cdot dV_x \cdot dV_y \cdot dV_z}; \quad (2.34)$$

$$\vec{J}_{\text{локальн}} = q \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{V} \cdot \tilde{N}(V_x, V_y, V_z) \cdot G_{\vec{V}} \cdot dV_x \cdot dV_y \cdot dV_z. \quad (2.35)$$

Как будет показано далее, единственный, но роковой недостаток общепринятого представления плотности тока (2.35) состоит в том, что на самом деле оно не позволяет отличить локальную величину от усредненной по бесконечно большому объему<sup>2)</sup>. Для этого необходим независимый комментарий.

1) Это понятие вводится для удобства вычислений.

2) Тем же недостатком страдает, естественно, и выражение

$$\vec{J} = q \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{(v/v_0)} \vec{V}_i \cdot \tilde{N}(\vec{V}_i) \right\}.$$

Допустим теперь, что мы ожидаем возникновения тока вдоль оси  $Z$ . Тогда преобразуем заранее выражение (2.35) к виду

$$J_{z, \text{ локальн}} = q \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V_z \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}(V_x, V_y, V_z) \cdot G_{\vec{V}} \cdot dV_x \cdot dV_y \right\}. \quad (2.36)$$

Плотность тока равна нулю вдоль любого направления, если функция  $\tilde{N}(V_x, V_y, V_z)$  является сферически симметричной. Приписав симметричной (равновесной) функции индекс "0" и приняв в качестве  $\tilde{N}_0(V_x, V_y, V_z)$  функцию Ферми-Дирака совершенно свободных частиц, получим из (2.36)

$$J_{z, \text{ локальн}} = q \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V_z \cdot \left[ \frac{k_B \cdot T}{F} \cdot \ln \left( 1 + e^{\frac{F - \frac{m V_z^2}{2}}{k_B \cdot T}} \right) \right] \times \\ \times \left( \frac{m^2 \cdot F}{2\pi^2 \hbar^3} \right) \cdot dV_z = 0. \quad (2.37, a)$$

Введем обозначения

$$\frac{m^2 \cdot F}{2\pi^2 \hbar^3} = G_V^*; \quad \frac{k_B \cdot T}{F} \cdot \ln \left( 1 + e^{\frac{F - \frac{m V_z^2}{2}}{k_B \cdot T}} \right) = \tilde{N}_0^*(V_z),$$

подставим их в формулу (2.37, a) и получим:

$$J_{z, \text{ локальн}} = q \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V_z \cdot \tilde{N}_0^*(V_z) \cdot G_V^* \cdot dV_z = 0. \quad (2.37, b)$$

Теперь можно сказать, что величина  $G_V^*$  играет роль одномерной плотности состояний, а  $\tilde{N}_0^*(V_z)$  — роль равновесной степени заполнения состояния с определенной лишь  $z$ -составляющей скорости  $\vec{V}$  (и всевозможными ее  $x$  и  $y$ -составляющими). На рис. 2.4 представлен вид функции  $\tilde{N}_0^*(V_z)$  при разных температурах. Чтобы отобразить существование тока (допустим, что  $J_z \neq 0$ ,  $J_x = J_y = 0$ ), достаточно нарушить симметрию функции  $\tilde{N}(\vec{V})$ . Примером может

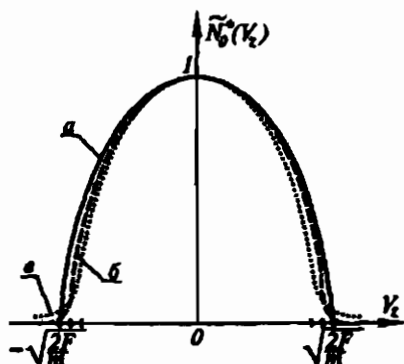


Рис. 2.4. Функции  $\tilde{N}_0^*$  при различных температурах:

а — при  $T = 0$ ; б — при  $T_1 > 0$ ; в — при  $T_2 > T_1$ . Следует иметь в виду, что с ростом  $T$  величина  $F$  уменьшается

служить “сдвинутая” (вдоль оси  $V_z$ ) функция  $\tilde{N}^*(V_z)$ . Она имеет вид (рис. 2.5):

$$\tilde{N}^*(V_z) = \tilde{N}_0^*(V_z - V_{др}). \quad (2.38)$$

Отвечающее ей значение  $J_z$  найдем, заменив в выражении (2.37,6) равновесную функцию  $\tilde{N}_0^*(V_z)$  на сдвинутую. Получим:

$$\begin{aligned} J_{z, \text{локальн}} &= q \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V_z \cdot \tilde{N}_0^*(V_z - V_{др}) \cdot G_V^* \cdot dV_z = \\ &= \left\{ q \cdot G_V^* \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (V_z - V_{др}) \cdot \tilde{N}_0^*(V_z - V_{др}) \cdot d(V_z - V_{др}) + \right. \\ &\quad \left. + q \cdot V_{др} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}_0^*(V_z - V_{др}) \cdot G_V^* \cdot dV_z \right\} = \\ &= \{0 + q \cdot V_{др} \cdot n\} = q \cdot n \cdot V_{др}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

где  $n$  — концентрация электронов.

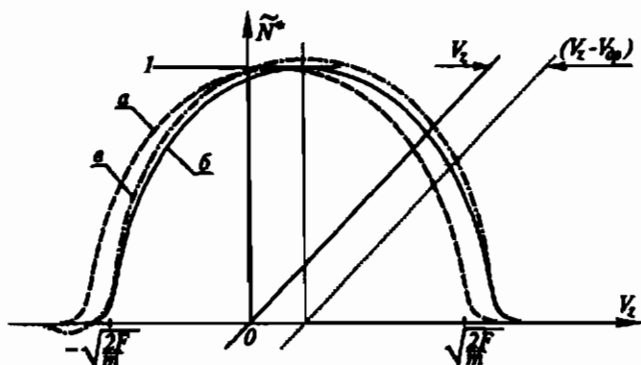


Рис. 2.5. Распределение электронов по величинам  $z$ -составляющих скоростей  $\vec{V}$  (при  $F \gg k_B \cdot T > 0$ ):

$a$  — равновесное распределение;  $b$  — сдвинутое;  $c$  — заданное соотношением (2.46)

С помощью рис. 2.5 легко понять, почему 1-й интеграл в фигурных скобках равен нулю, а второй равен  $n$ .

Выясним теперь, как прийти к сдвинутой функции  $\tilde{N}$ . Традиционное уравнение, описывающее процесс изменения степени заполнения во времени, имеет вид:

$$\left. \frac{d\tilde{N}}{dt} \right|_{\text{от поля } \mathcal{E}_z} + \left. \frac{d\tilde{N}}{dt} \right|_{\text{от внутр. причин}} = 0, \quad (2.40)$$

причем в момент включения поля (при  $t=0$ )

$$\tilde{N}(t=0) = \tilde{N}_0. \quad (2.41)$$

Первое слагаемое в левой части (2.40) нередко представляют в виде

$$\left. \frac{d\tilde{N}}{dt} \right|_{\text{от поля } \mathcal{E}_z} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} + \frac{d\tilde{N}_0}{dt} \cdot \frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} + \frac{d\tilde{N}_0}{dV_z} \cdot \frac{q \cdot \mathcal{E}_z}{m}, \quad (2.42)$$

Считается, что поле  $\mathcal{E}_z$  возникает скачкообразно, а затем остается неизменным во времени.

Что касается второго слагаемого, то простейшее предположение, которое также нередко делают, состоит в том, чтобы приравнять

$$\left. \frac{d\bar{N}}{dt} \right|_{\text{от внутр. причин}} = (\bar{N} - \bar{N}_0) \cdot \left( \frac{1}{\tau} \right). \quad (2.43)$$

а величину  $(1/\tau)$  считать параметром, ни от чего не зависящим (характеризующим данный образец металла)<sup>1)</sup>.

Подстановка (2.42) и (2.43) в (2.40) с учетом (2.41) приводит к решению:

$$\begin{aligned} \bar{N}(V_x, V_y, V_z, t) &= \bar{N}_0(V_x, V_y, V_z) - \\ &- \frac{d\bar{N}_0(V_x, V_y, V_z)}{dV_z} \cdot \left[ \frac{q \cdot \epsilon_z}{m} \cdot \left( \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \right] \cdot \left( 1 - e^{-\left( \frac{1}{\tau} \right) \cdot t} \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

По "окончании" переходного процесса ( $t \rightarrow \infty$ ) оказывается, что функция распределения  $\bar{N}_0$  сдвинулась вдоль оси  $V_z$  на

$$\Delta V_z = \frac{q}{m} \cdot \left( \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \cdot \epsilon_z, \quad (2.45)$$

а неравновесная квазистационарная степень заполнения равна

$$\bar{N}(V_x, V_y, V_z) = \bar{N}_0(V_x, V_y, V_z) - \frac{d\bar{N}_0(V_x, V_y, V_z)}{dV_z} \cdot \Delta V_z. \quad (2.46)$$

Так как по определению

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{N}_0(V_x, V_y, V_z)}{dV_z} = \\ &= \lim_{\Delta V_z \rightarrow 0} \frac{\bar{N}_0(V_x, V_y, V_z) - \bar{N}_0(V_x, V_y, V_z - \Delta V_z)}{\Delta V_z}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

<sup>1)</sup> Параметр  $(1/\tau)$  будет далее интерпретирован как частота столкновений электронов со всеми дефектами образца. Сейчас принципиально важным является лишь требование независимости  $(1/\tau)$  от  $\bar{E}$ . В противном случае расчет становится сложным.

казалось бы, отсюда вытекает возможность написать:

$$\begin{aligned} & \tilde{N}_0(V_x, V_y, V_z - \Delta V_z) = \\ & = \tilde{N}_0(V_x, V_y, V_z) - \frac{d\tilde{N}_0(V_x, V_y, V_z)}{dV_z} \cdot \Delta V_z, \end{aligned} \quad (2.48)$$

а сравнив после этого формулы (2.46) и (2.48), приравнять

$$\tilde{N}(V_x, V_y, V_z) = \tilde{N}_0(V_x, V_y, V_z - \Delta V_z).$$

На самом деле перейти от выражения (2.47) к (2.48) нельзя, если сдвиг  $\Delta V_z$  хотя и мал, но конечен. Необходимо учитывать и производные высших порядков:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_0(V_x, V_y, V_z - \Delta V_z) = & \tilde{N}_0(V_x, V_y, V_z) - \\ & - \frac{d\tilde{N}_0}{dV_z} \cdot \Delta V_z - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2\tilde{N}_0}{dV_z^2} \cdot (\Delta V_z)^2 - \dots \end{aligned}$$

Отбрасывание слагаемых высшего порядка малости сопровождается уже деформацией функции  $\tilde{N}(V_x, V_y, V_z)$  при ее сдвиге, если только продолжать называть функцию, определенную соотношением (2.46), "сдвинутой". Эта деформация оказывается в некоторых областях оси  $V_z$  столь значительной, что функция  $\tilde{N}(V_x, V_y, V_z)$  принимает в них совершенно неправдоподобный вид (см. рис. 2.5).

Столь разрушительные деформации можно устранить, если использовать в соотношении (2.42) производную  $\frac{d\tilde{N}}{dV_z}$  вместо  $\frac{d\tilde{N}_0}{dV_z}$ . Тем не менее и в этом случае также нельзя прийти к чистому сдвигу вдоль оси  $V_z$ . К счастью, вне зависимости от степени деформации стационарной функции  $\tilde{N}(V_x, V_y, V_z)$  использование представления ее в виде

$$\tilde{N} = \tilde{N}_0 - \frac{d\tilde{N}}{dV_z} \cdot V_{др} \quad (2.49)$$

приводит к выражению

$$J_z, \text{ локальн} = q \cdot n \cdot V_{др}.$$



Действительно, подставив выражение (2.49) в (2.36), получим:

$$\begin{aligned} J_{z, \text{ локальн}} &= -q \cdot V_{\text{др}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G_V^* \cdot V_z \cdot \left( \frac{d\tilde{N}^*(V_z)}{dV_z} \right) \cdot dV_z = \\ &= -q \cdot V_{\text{др}} \cdot \left\{ G_V^* \cdot (V_z \cdot \tilde{N}^*(V_z)) \Big|_{V_z=-\infty}^{V_z=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} G_V^* \cdot \tilde{N}^*(V_z) \cdot dV_z \right\} = \\ &= -q \cdot V_{\text{др}} \cdot \{0 - n\} = q \cdot n \cdot V_{\text{др}}. \end{aligned}$$

При вычислении использовано лишь вполне оправданное предположение, что  $\tilde{N}^*(V_z \rightarrow \pm \infty) \rightarrow 0$  (впрочем и  $\tilde{N}_0^*(V_z \rightarrow \pm \infty) \rightarrow 0$ ).

Теперь обратим внимание на одно существенное обстоятельство. Уравнение (2.40), взятое в качестве исходного для описания процесса возникновения и установления тока, содержит производную  $\left. \frac{d\tilde{N}}{dV_z} \right|_{\text{от поля } \mathcal{E}_z}$ , в которую входит, согласно (2.41), ускорение

$\left( \frac{dV_z}{dt} \right)$ . Именно это ускорение относят за счет внешнего возмущения, положив

$$\frac{dV_z}{dt} = a_z = \frac{q \cdot \mathcal{E}_z}{m}.$$

Однако, тем самым грубо нарушается введенное ранее предположение, что  $\vec{V}$ -пространство существует независимо от существования и движения частиц и что внешнее возмущение может влиять только на степень заполнения  $\vec{V}$ -состояния<sup>1)</sup>.

Выясним, можно ли прийти к кинетическому уравнению

$$\frac{\partial \tilde{N}^*(V_z, t)}{\partial t} + \frac{q \cdot \mathcal{E}_z}{m} \cdot \frac{d\tilde{N}^*(V_z, t)}{dV_z} + \frac{\tilde{N}^*(V_z, t) - \tilde{N}_0^*(V_z)}{\tau} = 0,$$

не нарушая упомянутого предположения.

1) Такое предположение необходимо для использования статистического подхода к вычислению тока и других величин.

Рассмотрим коллектив электронов, существующих в реальном нормальном металле. Для каждой из частиц, входящих в этот коллектив, можно написать **чисто динамическое уравнение**

$$\frac{dV_{(1), z}(t)}{dt} = a_z - \frac{F_{z, \text{внутр}}}{m}. \quad (2.50)$$

Здесь

$$V_{(1), z}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} V_z \cdot \tilde{N}^*(V_z, t) \cdot G_V^* \cdot dV_z}{n}; \quad (2.51)$$

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}^*(V_z, t) \cdot G_V^* \cdot dV_z = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}_0^*(V_z) \cdot G_V^* \cdot dV_z = \text{const}; \quad (2.52)$$

$a_z = (q \cdot E_z) / m$  — ускорение (допустим, что не зависящее от координат и времени), вызванное только **внешней силой**;  $F_{z, \text{внутр}}$  — сила внутреннего сопротивления движению.

Допустим, что

$$F_{z, \text{внутр}} = \frac{m \cdot [V_{(1), z}(t) - V_{(1), z}(t=0)]}{\tau}, \quad (2.53)$$

то есть, что сила пропорциональна скорости изменения импульса электрона, которое вызвано внешним полем.

Подставим выражения (2.51—2.53) в (2.50), считая, что  $\frac{dV_z}{dt} = 0$  (поскольку  $\vec{V}$ -пространство существует само по себе). Получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{N}^*(V_z, t)}{\partial t} \cdot V_z \cdot G_V^* \cdot dV_z = a_z \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}^*(V_z, t) \cdot G_V^* \cdot dV_z - \frac{1}{\tau} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V_z \cdot [\tilde{N}^*(V_z, t) - \tilde{N}_0^*(V_z)] \cdot G_V^* \cdot dV_z. \quad (2.54, a)$$

Сократив все члены уравнения на  $G_V^*$ , преобразуем первый интеграл в правой части:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}^*(V_z, t) \cdot dV_z = \\ = \left( \tilde{N}^*(V_z, t) \cdot V_z \right) \Big|_{V_z=-\infty}^{V_z=\infty} - \int_{\tilde{N}^*(V_z=-\infty)}^{\tilde{N}^*(V_z=\infty)} V_z \cdot d\tilde{N}^*(V_z, t) \cdot 1)$$

Поскольку  $V_z$  — двузначная “функция”  $\tilde{N}^*$ , интегрирование в области  $\tilde{N}^*$  — громоздкая операция. Поэтому выполним еще одно преобразование:

$$-\int_{\tilde{N}^*} V_z \cdot d\tilde{N}^* = \int_{V_z=-\infty}^{V_z=\infty} -V_z \cdot \left( \frac{d\tilde{N}^*(V_z, t)}{dV_z} \right) \cdot dV_z.$$

После этого выражение (2.54,а) сводится к виду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \tilde{N}^*(V_z, t)}{\partial t} + a_z \cdot \frac{d\tilde{N}^*(V_z, t)}{dV_z} + \frac{\tilde{N}^*(V_z, t) - \tilde{N}_0^*(V_z)}{\tau} \right\} \cdot V_z \cdot dV_z = 0. \quad (2.54,6)$$

Отсюда, вспоминая, что  $a_z = \frac{q \cdot \mathcal{E}_z}{m}$ , приходим к кинетическому уравнению

$$\frac{\partial \tilde{N}^*(V_z, t)}{\partial t} + \frac{q \cdot \mathcal{E}_z}{m} \cdot \frac{d\tilde{N}^*(V_z, t)}{dV_z} + \frac{\tilde{N}^*(V_z, t) - \tilde{N}_0^*(V_z)}{\tau} = 0, \quad (2.55)$$

в котором (еще раз напомним)

$$\frac{q \cdot \mathcal{E}_z}{m} \cong \frac{dV_{(1),z}}{dt},$$

но

$$\frac{dV_z}{dt} = 0.$$

1) Как следует из рис. 2.5, первое слагаемое в правой части этого выражения равно нулю.

### §2.6. Особенности рассеяния электронов на дефектах

В этом параграфе будет принято традиционное упрощающее предположение, что электроны в промежутках между актами рассеяния (между столкновениями с дефектами) движутся как свободные.

Пусть по образцу вещества течет ток, который, как нам кажется, постоянен во времени и плотность которого кажется нам одинаковой в каждой точке образца. Пусть, например,  $J_z \neq 0$ ,  $J_x = J_y = 0$ . Поскольку при условии  $\vec{J} \neq 0$  функция  $\tilde{N}(\vec{V})$  ассиметрична, положим

$$\tilde{N}^*(V_z) = \tilde{N}_0^*(V_z) + \Delta\tilde{N}^*(V_z),$$

где  $\Delta\tilde{N}_0^*(V_z)$  — антисимметричная стационарная добавка за счет того самого поля  $\mathcal{E}_z$ , которое и вызвало упомянутый ток.

Теперь выключим (простоты ради — скачком) поле  $\mathcal{E}_z$ . После этого функция  $\tilde{N}^*(V_z)$  начнет меняться во времени и, если основываться на уравнении (2.55), то по закону

$$\tilde{N}^*(V_z, t) = \tilde{N}_0^*(V_z) + \Delta\tilde{N}^*(V_z) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

После подстановки этого выражения в формулу для плотности тока получаем:

$$\begin{aligned} J_{z, \text{ локальн}}(t) &= q \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V_z \cdot \left[ \Delta\tilde{N}^*(V_z) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot G_V^* \cdot dV_z = \\ &= \left[ q \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V_z \cdot \Delta\tilde{N}^*(V_z) \cdot G_V^* \cdot dV_z \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

В левой части соотношения (2.56) индекс “локальный” использован для напоминания, что  $J_z(t)$  — это плотность тока именно в точке. Совершенно очевидно, что с учетом принятого предположения о независимости  $J_{z, \text{ локальн}}$  от координат соотношение (2.56) нельзя интерпретировать иначе, как следующим образом: плотность тока уменьшается из-за рассеяния электронов на дефектах и при этом уменьшается одновременно (синхронно) в каждой точке образца и в каждой точке уменьшается непрерывно.

Чтобы осмыслить сказанное, вспомним, что было также решено считать электрон движущимся свободно в течение времени  $\tau$  между двумя последовательными соударениями с дефектами. И хотя последние расположены друг от друга на конечном расстоянии, это расстояние справедливо рассматривать как исчезающе малое по сравнению с размерами образца, что и позволяет считать два соседних дефекта находящимися в “одной точке” образца.

Вот теперь попробуем выяснить, не противоречит ли интерпретация соотношения (2.56) нашим ранее сложившимся представлениям о характере движения электронов проводимости в металле.

Во-первых, легко согласиться, что, поскольку рассеяние есть случайный процесс, одновременное столкновение всех электронов с дефектами, хаотично разбросанными по всему образцу, — событие практически невероятное, если, несмотря на ограничение концентрации электронов снизу, размеры образца огромны. Отсюда следует, что плотность тока в объеме образца на самом деле не может затухать одновременно повсюду.

Во-вторых, если концентрация дефектов ограничена сверху, то ограничен снизу промежуток времени ( $\tau$ ) между двумя последовательными соударениями одного электрона, находящегося в “одной точке”. Стало быть, в течение конечного промежутка времени скорость носителя тока в упомянутой “точке” (равно, как и в любой другой) остается неизменной. Но тогда локальная плотность тока не может затухать непрерывно.

Таким образом, если считать вполне разумными наши представления о характере движения электронов в металле, то соотношение (2.56) придется интерпретировать иначе.

Прежде всего отметим, что признать плотность тока способной меняться непрерывно означает признать таковой и величину  $\vec{V}_{(1)}$ , поскольку  $\vec{J} = q \cdot n \cdot \vec{V}_{(1)}$ , а  $n = \text{const}$ . Но  $\vec{V}_{(1)}$  — это скорость отдельного (при том каждого) электрона, усредненная, если и не по бесконечно большому, то по крайней мере достаточно большому промежутку времени. Если эту среднюю скорость электрон приобретает только в результате столкновений с дефектами, он должен испытать их достаточно много. За время же  $\tau$  он столкнется всего один раз.

Поскольку описанным способом приобретает среднюю скорость каждый электрон, ясно, что сумма скоростей всех электронов образ-

ца<sup>1)</sup> в любой момент времени равна сумме скоростей одного электрона после столкновения с каждым дефектом<sup>2)</sup>.

При таком характере движения электронов интерпретация плотности тока, определенной формулой (2.56), может отличаться от ранее принятой. Ведь если считать величину  $\vec{J}$  локальной, то ее придется считать усредненной по большому промежутку времени  $\Delta t = \tau \cdot n_d \cdot v$ , где  $n_d$  — концентрация дефектов; если же считать величину  $\vec{J}$  мгновенной, то ее придется считать усредненной по всему объему ( $v$ ) образца.

Отсюда ясно, что в любой момент времени имеют место пространственные флуктуации плотности тока, а в любой точке образца — флуктуации временные.

Поскольку правая часть соотношения (2.56) представляет собой непрерывную функцию времени, то для плотности тока, изменявшейся именно из-за рассеяния электронов на дефектах, необходимо отождествление

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_z \cdot \left[ \Delta \tilde{N}^*(V_z) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot G_V^* \cdot dV_z \equiv \langle J_z(t) \rangle_{v \rightarrow \infty}. \quad (2.57)$$

Заметим, что такое отождествление действительно возможно, ибо в левой части выражения (2.57) собраны  $\vec{V}$ -состояния со всего образца (бесконечно большого объема). Кстати, упоминавшийся в начале §2.5 роковой недостаток соотношения (2.35) (а соотношение (2.57) — аналогичное) в том и состоит, что структура его требует привнесения интерпретации извне, основанной на совершенно самостоятельных соображениях.

Рис. 2.6 поясняет, как возникает представление о непрерывном изменении. Допустим сначала, что имеем дело с одноэлектронным “коллективом”. Символом  $t_1$  на рис. 2.6, а помечен момент столкновения электрона с одним из дефектов, в результате чего электрон изменил свою скорость с  $\vec{V}_i$  на  $\vec{V}_j$ . Следующее изменение скорости

1) Число их равно  $n \cdot v$ , и при  $v \rightarrow \infty$  число их бесконечно велико.

2) Число их равно  $n_d \cdot v$  (где  $n_d$  — концентрация дефектов), и при  $v \rightarrow \infty$  число их бесконечно велико. Время, требуемое для столкновения со всеми ними, равно  $\tau \cdot (n_d \cdot v)$  и следовательно тоже бесконечно велико.

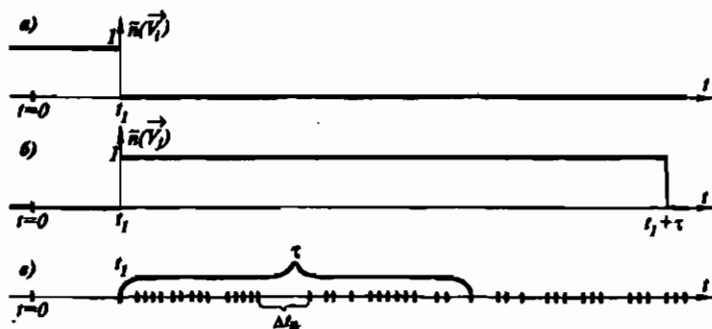


Рис. 2.6. Моменты столкновений электронов с дефектами. Отсчет времени начат с момента выключения электрического поля:

*a* — в момент  $t_1$  произошел акт рассеяния, в результате чего электрон изменил скорость с  $\vec{V}_i$  на  $\vec{V}_j$ ; *b* — в момент  $(t_1 + \tau)$  произошел акт рассеяния электрона, обладавшего в течение времени  $\tau$  скоростью  $\vec{V}_j$ ; *в* — отмечены все подряд моменты столкновений всех электронов с дефектами, разбросанными по всему образцу

электрона (в результате акта рассеяния) произойдет не раньше, чем через промежуток времени  $\tau$  (рис. 2.6, б).

Если связать с определенным  $\vec{V}$ -состоянием “частную” ось времени ( $t_{\vec{V}}$ ), то изменение степени заполнения этого состояния будет происходить чрезвычайно редко.

Теперь обратимся к многоэлектронному коллективу. Ясно, что за то время ( $\tau$ ), в течение которого степень заполнения определенного  $\vec{V}$ -состояния (каждого из них) оставалась неизменной, происходили акты рассеяния электронов, находившихся (каждый до столкновения) в других  $\vec{V}$ -состояниях. На общей для всех  $\vec{V}$ -состояний оси времени интервалы  $\Delta t_{jk}$  между просто последовательными столкновениями (изменениями степени заполнения любого из  $\vec{V}$ -состояний) будут чрезвычайно малы (рис. 2.6, в).

Если учесть, что в “одной точке” образца присутствует один дефект, ясно, что в “одной точке” акты рассеяния происходят отнюдь не непрерывно.

Естественно, что интервал  $\Delta t_{jk}$  убывает с ростом концентрации электронов ( $n$ ), равно как интервал  $\tau$  с ростом концентрации дефектов ( $n_d$ ). Однако несмотря на то, что при любой конечной кон-

центрации тех и других может быть справедливым и “слабое” неравенство  $\Delta t_{jk} < \tau$ , разумно предположить, что

$$\lim_{N_{эл} \rightarrow \infty} \Delta t_{jk} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Delta t_{jk} = 0,$$

$$\lim_{N_{\kappa} \rightarrow \infty} \tau = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tau \neq 0. \text{ 1)}$$

Здесь  $N_{эл} = n \cdot \nu$ ,  $N_{\kappa} = n_{\kappa} \cdot \nu$ , где  $N_{\kappa}$  — число дефектов во всем образце,  $\nu$  — его объем,  $N_{эл}$  — число электронов в нем. Тот факт, что  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Delta t_{jk} = 0$ , как раз и позволяет считать непрерывным измене-

ние плотности тока, но на самом деле — не локальной величины, а усредненной по всему объему образца.

Мы выявили особенности рассеяния электронов, присущие любому механизму рассеяния. Обе они имеют одинаково принципиальное значение для понимания природы сверхпроводимости.

Рассмотрим сначала первую особенность. Если токонесящий электрон, изменив свою скорость после соударения с дефектом, движется как свободный (уже при отсутствии электрического поля) до следующего соударения достаточно долго (в течение времени  $\tau$ , ограниченного снизу), он в принципе может успеть восстановить прежнюю (до первого удара) скорость (см. рис. 2.7). Если, например, время восстановления прежней скорости  $\tau_{\text{восст}}$  гораздо меньше, чем  $\tau$ , то почти все время  $\tau$  до следующего акта рассеяния электрон будет двигаться так, как если бы предыдущего акта рассеяния не было вообще.

Разумеется, восстановление скорости требует от электрона участия в некоем (добавочном) взаимодействии. И здесь мы вынужденно приходим к любопытному заключению. Ведь уже в первое мгновение после соударения с дефектом электрон “забывает”, какой скоростью он обладал до удара. Чтобы эту скорость он мог восстановить, в электронном коллективе, переносящем ток, должны постоянно присутствовать носители — эталоны скорости, и они должны быть способными втягивать в свой поток рассеявшийся, было, электрон

1) Величина  $\Delta t_{jk}$ , по определению, зависит от числа электронов, а величина  $\tau$  — от концентрации дефектов.



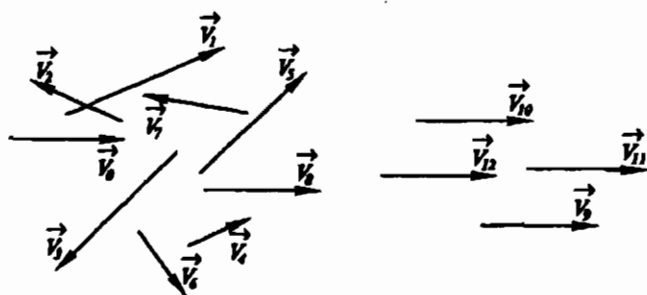


Рис. 2.7. Схема изменения скорости электрона после акта рассеяния:

$\vec{V}_0$  — скорость перед столкновением с дефектом,  $\vec{V}_1$  — скорость в первое мгновение после столкновения,  $\vec{V}_2 + \vec{V}_7$  — скорости в последующие моменты времени (значения и направления скоростей обусловлены участием электрона в некоем взаимодействии).

Начиная с момента  $t_0$  и вплоть до следующего столкновения скорость электрона совпадает с величиной  $\vec{V}_0$ . Описывать в это время положение электрона в пространстве, оперируя терминами “лево”, “право”, “выше”, “ниже” и т.п., уже нельзя, поскольку приняв, что неопределенность скорости стала равной  $\Delta V = 0$  (для величин  $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{12}$ ), мы автоматически признаем, что с равной вероятностью в любой момент времени электрон может находиться в любой точке пространства

(рис. 2.8). Поскольку скорость эталона, к которой и будет приближаться скорость каждого электрона после каждого акта рассеяния, должна соответствовать установившемуся значению и направлению плотности тока, таковой скоростью может быть только дрейфовая, и, конечно, обладать ею могут только электроны, участвующие в токе. Поскольку это так, любой из них, еще не испытавший рассеяния, способен выступать в роли эталона скорости для только что рассеявшегося. Таким образом, добавочное взаимодействие, о котором шла речь — это взаимодействие между всеми электронами, способными участвовать в токе и подверженными рассеивающему действию дефектов.

Теперь легко оценить значение второй особенности. Она состоит в том, что лишь одно событие могло бы помешать восстановлению скоростей электронов, испытавших соударение с дефектами. Это — акт одновременного рассеяния всех токонесящих электронов. При

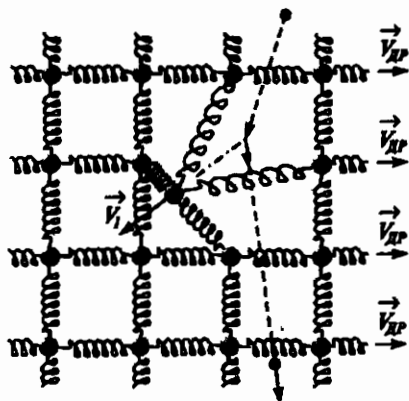


Рис. 2.8. Механическая модель, представляющая движение по инерции множества шаров, скрепленных идеальными пружинами в единый коллектив

Все шары и пружины непрерывно и хаотично осциллируют, так что скорость шара  $\vec{v}_d$  — величина, усредненная по времени.

Показано первое мгновение после соударения одного из шаров с маленьким шариком, играющим роль рассеивателя (штриховой линией показана траектория движения послед-

него). Векторы  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  — скорости столкнувшихся объектов сразу же после удара. Сильнее всего деформировались в это мгновение четыре пружины, ближайшие к рассеянному шару. Деформации остальных пружин не показаны. Огромное количество шаров, продолжающих двигаться (каждый со скоростью  $\vec{v}_d$ ) тягивает в свой поток рассеившийся шар.

Если вся совокупность шаров покоится ( $\vec{v}_d = 0$ ), то и рассеившийся шар, начавший, было, после столкновения двигаться прямолинейно, в конце концов остановится

этом обращение плотности тока в нуль происходило бы повсюду (во всех точках образца) и мгновенно.

Обозначим символом  $B_1$  нормированную на единицу вероятность столкновения одного электрона с одним из дефектов. Естественно,  $B_1 < 1$ . А поскольку вероятность одновременного рассеяния всех электронов на дефектах равна

$$B_{\text{всех}} = (B_1)^{N_{\text{ш}}} = (B_1)^n \cdot \nu,$$

легко видеть, что даже при ограниченной сверху концентрации электронов

$$\lim_{N_{\text{ш}} \rightarrow \infty} B_{\text{всех}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} B_{\text{всех}} = 0.$$

Таким образом, вероятность мгновенного и повсеместного обращения в нуль плотности тока исчезающе мала.

## §2.7. Специфика состояния электрона, способного восстанавливать свою скорость после столкновения с дефектом

### 2.7.1. Описание процесса релаксации

Присутствие дефектов в сверхпроводнике не приводит к затуханию тока, несмотря на отсутствие в нем электрического поля. В §2.6 было сделано заключение о возможности объяснить столь удивительное явление, в частности, тем, что токнесущие электроны, пока они движутся прямолинейно и равномерно, выступают в роли носителей-эталонов скорости для электронов, испытавших соударения с дефектами. При этом по крайней мере в течение промежутка времени  $\tau$  скорость каждого электрона, выступающего в это время в роли эталона, должна быть равна  $\vec{V}_{др}$ . Подчеркнем: именно  $\vec{V}_{др}$ , а не

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{др} + \vec{V}_{o,i},$$

где  $\vec{V}_{o,i}$  была бы исходной (то есть при  $\vec{J} = 0$  и до включения поля  $\vec{E}$ ) скоростью электрона<sup>1)</sup>.

Ранее уже говорилось, в каком случае средняя по времени скорость каждого отдельного электрона одинакова и равна

$$\vec{V}_{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \vec{V}_i \cdot \tilde{N}(\vec{V}_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}(\vec{V}_i)}. \quad 2)$$

Необходимое при этом условие  $0 < \tilde{N}(\vec{V}_i) < 1$  должно быть теперь интерпретировано как указание на участие каждого электрона в таком взаимодействии, которое даже в течение времени  $\tau$  не дает оснований считать электрон обладающим скоростью  $\vec{V}_i$ , отличной от  $\vec{V}_{др}$  (если  $\vec{V}_{др} \neq 0$ ), или обладающим скоростью  $\vec{V}_{o,i}$ , если  $\vec{V}_{др} = 0$ . Заметим, что в выражении для  $\vec{V}_{(1)}$  (равно, как и в выражении для  $\tilde{N}$ ) вектор  $\vec{V}_i$  не является ни средней, ни мгновенной скоростью

1) Напомним, что каждый такой электрон должен считаться свободным. Напомним также, что различных векторов  $\vec{V}_{o,i}$  бесконечно много.

2) Величина  $\vec{V}_{(1)} = 0$  при отсутствии даже следов внешнего возмущения, но  $\vec{V}_{(1)} = \vec{V}_{др}$  в результате действия внешнего возмущения (либо неизменного во времени, либо достаточно медленно меняющегося, либо вызвавшего дрейф, а затем исчезнувшего).

электрона; это просто один из векторов, существующих в  $\vec{V}$ -пространстве.

Подчеркнем, что если участие в упомянутом взаимодействии не препятствует совершенно свободному перемещению электрона по образцу (уже со скоростью  $\vec{V}_{(1)} \neq 0$  ( $\vec{V}_{(1)} = \vec{V}_{др}$ )), то в каком бы месте образца электрон ни оказался, он должен одинаковым образом участвовать в вышеназванном взаимодействии. Именно оно при отсутствии в образце дефектов отвечает за то, что  $0 < \bar{N}(\vec{V}) < 1$ . Следовательно, быстрое (“мгновенное”) восстановление значения  $\bar{N}(\vec{V})$  после акта рассеяния возможно, если величина  $\bar{N}(\vec{V})$  в бездефектом образце обусловлена колебаниями мгновенной степени заполнения  $\tilde{n}(\vec{V}, t)$  со столь высокой “частотой”  $\omega$ , что

$$\omega \cdot \tau \gg 2\pi. \quad (2.58, a)$$

1) Вектор  $\vec{V}$  в том случае, когда он является еще одним аргументом функции  $\tilde{n}(t)$  — и только в этом случае — интерпретируется как мгновенная скорость частицы.

2) Обычно в случае нормального металла  $\tau = \left(\frac{l}{V_F}\right)$ , где  $l$  — расстояние между дефектами, а  $V_F$  — фермиевская скорость электрона, называемого свободным постольку, поскольку считается, что между столкновениями он движется прямолинейно и равномерно. Типичные значения таковы:  $l = 10^{-5}$  см,  $V_F = 10^8$  см/с. Отсюда  $\tau = 10^{-13}$  с. При этом дрейфовая скорость электронов может быть как очень большой, так и очень маленькой, но не от нее зависит  $\tau$ .

Совершенно иная ситуация возникает после перехода металла в сверхпроводящую фазу. Расстояние  $l$  не изменяется, а вот скорость каждого электрона, будучи усредненной на интервале  $\Delta t$  ( $\ll \tau$ ), оказывается настолько малой ( $V_{(1)} \neq 0$ , если  $J \neq 0$ ), что для прохождения пути длиной  $l$  потребуются время несоизмеримо огромное по сравнению с  $(l/V_F)$ . Участвуя в дрейфе, сверхпроводящий электрон движется со средней скоростью  $V_{др}$ , которая тем не менее даже при критической плотности тока гораздо меньше  $V_F$ . Поэтому могло бы показаться, что для сверхпроводящего электрона  $(l/V_{др}) \approx \tau \gg 10^{-13}$  с, и удовлетворить неравенству (2.58) очень легко. Однако в результате столкновения с дефектом сверхпроводящий электрон в первое мгновение приобретает скорость  $\approx V_F$ . Если с такой скоростью он будет двигаться прямолинейно, то уже через  $10^{-13}$  с вновь столкнется с дефектом. Этого не произойдет, если электрон гораздо раньше уменьшит начальную скорость до  $V_{др}$ . Именно к этому и приводит участие сверхпроводящего электрона во взаимодействии с неким внутренним полем.

Поэтому необходимым оказывается условие именно (2.58, а):  $\omega \cdot \tau = \omega \cdot \left(\frac{l}{V_F}\right) \gg 2\pi$ .

Заметим, что транспортная длина пробега сверхпроводящего электрона сводится к длине образца.

См. также Приложение 3.

В этом случае можно ввести интервал  $\Delta t_*$ , удовлетворяющий неравенствам

$$\tau \gg \Delta t_* \gg \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.58,6)$$

и потому позволяющий ввести понятие о квазистационарной степени заполнения  $\vec{V}$ -состояния:

$$\tilde{N}_c(\vec{V}, t) = \frac{1}{\Delta t_*} \cdot \int_{t - \frac{\Delta t_*}{2}}^{t + \frac{\Delta t_*}{2}} \tilde{n}_c(\vec{V}, t') \cdot dt'. \quad (2.59)$$

Индекс “с” означает, что введенная степень заполнения обусловлена участием электронов только в вышеупомянутом специфическом взаимодействии. Если бы электроны участия в нем не принимали, оказалось бы, что (при условии  $\tau \gg \Delta t_*$ ) в промежутке  $\Delta t_*$  во время свободного пробега

$$\tilde{N}(\vec{V}_i) = \langle \tilde{n}(\vec{V}_i) \rangle_{\Delta t_*} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ либо.}$$

Заметим, что акт рассеяния электрона можно отобразить мгновенным изменением степеней заполнения двух состояний (опустевшего и заполнившегося) — величин  $\tilde{n}(\vec{V}_i)$  и  $\tilde{n}(\vec{V}_j)$ . Однако если эти последние и без того колеблются во времени вполне закономерно (в том смысле, что колебания не имеют отношения к случайным актам рассеяния) и притом с очень большой частотой, то уже в “следующее мгновение” после акта рассеяния величины  $\tilde{n}_c(\vec{V}_i)$  и  $\tilde{n}_c(\vec{V}_j)$  приобретут “закономерные” значения. Таким же образом, и акт нарушения, и акт восстановления “закономерного” процесса колебаний величины  $\tilde{n}_c$  могут оказаться равно “мгновенными” событиями, каковые тогда, разумеется, не отразятся на величинах  $\tilde{N}_c(\vec{V}_i)$  и  $\tilde{N}_c(\vec{V}_j)$ , усредняемых по “огромному” интервалу времени. Поэтому очевидно, что в сверхпроводнике столкновения электронов с дефектами происходят, но значения  $\tilde{N}_c(\vec{V})$ , которые обусловлены колебаниями величин  $\tilde{n}_c(\vec{V})$ , вызванными участием электронов в упоминавшемся специфическом взаимодействии, от этого не меняются.

На рис. 2.9, а показано, какой представляется эволюция степени заполнения  $\tilde{N}_c(\vec{V})$  после случайного акта рассеяния. Поскольку

имеет место равенство (2.59), значение  $\tilde{N}_c$  следует относить к моменту  $t'$ . Так как сам этот момент можно непрерывно перемещать вдоль оси времени  $t$ , величины  $t'$  и  $t$  отождествляются.

Если перемещение вдоль оси  $t$  будет достаточно значительным, промежуток  $\Delta t_0$  будет выглядеть исчезающе малым. В частности, так будет выглядеть промежуток, разделяющий два момента:

$$t_{\text{до акта рассеяния}} = t_1 - \frac{\Delta t_0}{2} \quad \text{и} \quad t_{\text{после акта рассеяния}} = t_1 + \frac{\Delta t_0}{2}.$$

Тогда изменение  $\tilde{N}_c$  допустимо отнести к моменту  $t_1$ :

$$\tilde{N}_c \left( t_1 + \frac{\Delta t_0}{2} \right) - \tilde{N}_c \left( t_1 - \frac{\Delta t_0}{2} \right) = \Delta \tilde{N}_c ( t_1 ),$$

из-за чего оно и выглядит скачкообразным. Далее, поскольку больше уже никаких случайностей не происходит, усреднение ведется непрерывно. Поэтому, если зависимость  $\tilde{n}_c(t)$  выглядит, как показано на рис. 2.9, б, но

$$\Delta t_0 \gg \frac{2\pi}{\omega},$$

то зависимость  $\tilde{N}_c(t)$  на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_2$  допустимо представить плавной кривой. Если очень хочется, чтобы она хотя бы в принципе могла соответствовать традиционному виду

$$\tilde{N}_c(t) = \tilde{N}_c \left( t_{\substack{\text{в первое мгновение} \\ \text{после акта рассеяния}}} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{\text{восст}}}},$$

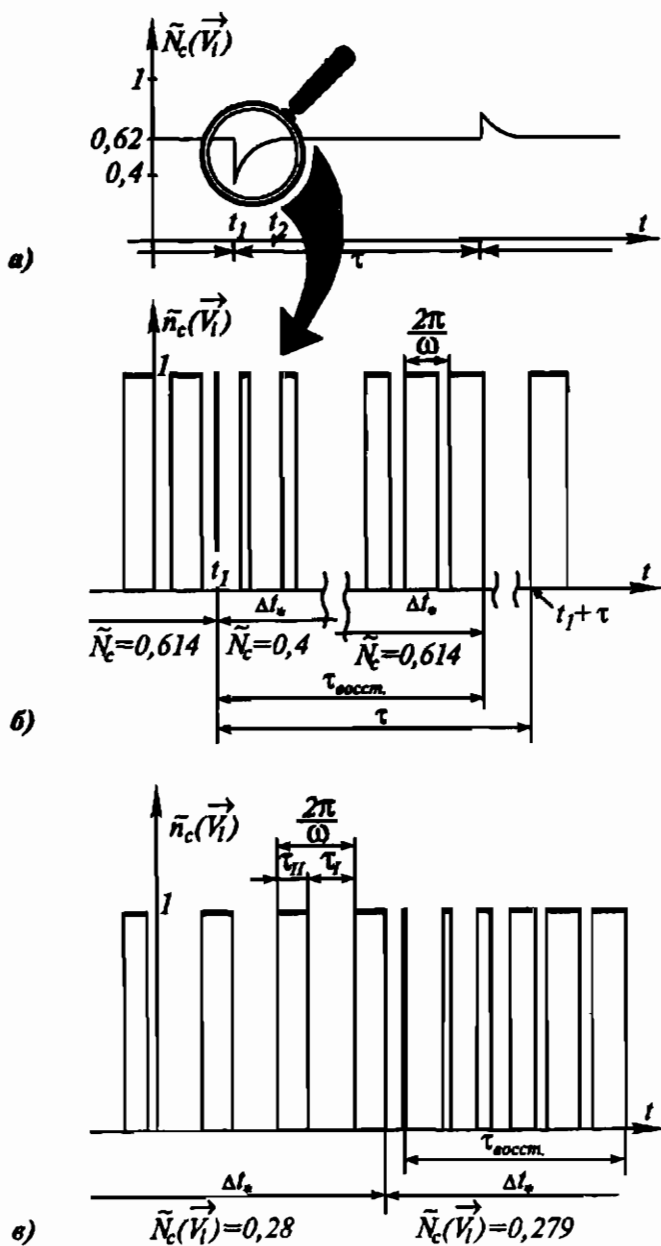
необходимо потребовать реализации условий

$$\tau \gg \tau_{\text{восст}} \gg \Delta t_0 \gg \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.60)$$

При соблюдении условия  $\tau \gg \tau_{\text{восст}}$  всякие последствия акта рассеяния исчезают задолго до момента  $(t_1 + \tau)$  следующего акта. Подчеркнем, что это справедливо и в случае, когда

$$\tau \gg \Delta t_0 \gg \tau_{\text{восст}} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.61)$$

В этом случае акты рассеяния и восстановления выглядят равномоментными событиями уже по сравнению с промежутком времени  $\Delta t_0$ .



*Рис. 2.9. Результаты столкновения электронов с дефектами в сверхпроводнике:*

*а* — мелкий масштаб. Кажется, что величина  $\tilde{N}_c(\vec{V}_i)$  меняется скачком, а затем плавно, но очень быстро релаксирует к прежнему значению;  $t_1$  и  $(t_1 + \tau)$  — моменты столкновений электрона с дефектами;

*б* — крупный масштаб. Видно, что происходит на самом деле. Форма колебаний выбрана с целью наглядной демонстрации. Интервал  $(t_2 - t_1)$  выбран равным  $5\tau_{\text{восст}}$ ; промежуток времени  $\tau_{\text{восст}}$ , спустя который различие в величине  $\tilde{N}_c(\vec{V}_i)$  до и после акта рассеяния становится менее 1%, выбран равным  $10\Delta_c$  (показаны 1-й и 10-й интервалы усреднения);

*в* — восстановление “закономерных” частоты и скажкости после акта рассеяния в случае, если  $\tau_{\text{восст}} \ll \Delta_c$ ,  $\tau_{\text{восст}} = (2\pi/\omega)$ . Рисунок призван пояснить, что означает восстановление величины  $\tilde{N}_c$  за время, гораздо меньшее, чем интервал усреднения

Возникает любопытный вопрос. Реальна ли для сверхпроводника какая-либо из иерархий времен (2.61) или (2.60)?

В связи с этим целесообразно сначала выяснить, что нового привносит в процесс релаксации величины  $\tilde{N}_c(\vec{V})$  присутствие электрического поля.

### 2.7.2. Самовосстановление степени заполнения $\vec{V}$ -состояния — величинами $\tilde{N}_c(\vec{V})$ — в случае сверхпроводника

Обычно считают, что именно рассеивающее действие дефектов приводит к неизменности тока во времени, несмотря на присутствие в реальном нормальном металле постоянного электрического поля, созданного сторонним источником. Однако полезно взглянуть на действие поля и дефектов под другим углом зрения.

Условимся сначала считать электроны движущимися прямолинейно и равномерно в промежутках между столкновениями. Затем рассмотрим распределение электронов по скоростям, которое в момент  $t$  оказывается не слишком упорядоченным (рис. 2.10). Выделим два состояния, одно из которых ( $A$ ) в момент  $t$  пустое и находится в окружении пустых, а другое ( $B$ ) — занятое и — в окружении занятых. Предположим, что вследствие происшедшего в следующий момент  $(t + dt)$  акта рассеяния степени заполнения состояний  $A$  и  $B$  (и только их) изменились и стали равными:

$$\tilde{n}_A(t + dt) = 1, \quad \tilde{n}_B(t + dt) = 0.$$



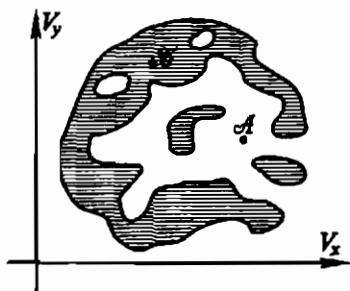


Рис. 2.10. Фрагмент мгновенного распределения электронов по скоростям в плоскости  $(V_x, V_y)$ :

в заштрихованных областях все состояния заняты электронами; в незаштрихованных областях все состояния пустые

Однако, если в металле присутствует в момент  $t$  электрическое поле, то уже последующее мгновение произойдет восстановление величин  $\tilde{n}_A$  и  $\tilde{n}_B$  до их исходных значений

$$\tilde{n}_A(t + 2dt) = 0, \quad \tilde{n}_B(t + 2dt) = 1.$$

Можно считать такое действие поля благоприятным эффектом, стабилизирующим величину тока несмотря на дестабилизирующее действие дефектов.

Тем не менее очевидно, что поле столь же мгновенно изменит заполнение всякого  $\vec{V}$ -состояния, которое будучи занятым, но находясь в окружении пустых, не подвергалось воздействию дефектов. То же самое относится и к  $\vec{V}$ -состоянию пустому, но находящемуся в окружении занятых. Подобное действие поля — явно дестабилизирующий эффект.

Из сказанного очевидно, что же нужно для реализации идеальной проводимости. Чтобы сложившееся на какой-то “момент” времени<sup>1)</sup> заполнение  $\vec{V}$ -состояний электронами в дальнейшем не изменялось, необходимо, чтобы

электрическое поле возникало только на  
“мгновение” и только в ответ на “мгновенное”  
же нарушение сложившегося распределения.

Пусть определенной зависимости  $\tilde{N}_c(\vec{V})$  отвечает столь же определенная усредненная по времени пространственная конфигурация некоего внутреннего силового поля. Тогда, если в какой-то точке ме-

<sup>1)</sup> На “момент” окончания переходного процесса установления тока и исчезновения поля в сверхпроводнике.

талла электрон, столкнувшись с дефектом, мгновенно изменит свою скорость ( $\vec{V}_{(1)}$ ), в окрестности этой же точки и столь же мгновенно нарушится сложившееся распределение зарядов (автоматически возникает пространственная флуктуация электронной концентрации, а стало быть, и ее градиент), и в малой окрестности этой точки изменится сложившаяся конфигурация упомянутого силового поля. Естественно, направления “избыточного” поля и градиента концентрации окажутся таковыми, что возникший “местный” ток будет восстанавливать и прежнее распределение зарядов, и однородность электронной концентрации, и прежнюю пространственную конфигурацию силового поля. В итоге будет восстановлена и исходная скорость электрона  $\vec{V}_{(1)}$ .

Заметим, что, объявив величину  $\tilde{n}_c(\vec{V}_i, t)$  колеблющейся во времени (например, по определенному закону), мы можем и “ликвидировать” введенное внутреннее силовое поле<sup>1)</sup>. Тогда все ранее сказанное упрощается: можно будет считать, что определенной зависимости  $\tilde{N}(\vec{V})$  на “момент”  $t$  отвечают уже отсутствие внутреннего поля вообще и якобы подлинная электронейтральность. А когда со следующего “мгновения” начнутся столкновения электронов с дефектами, всякий раз будет нарушаться эта “подлинная” электронейтральность<sup>2)</sup>, из-за чего будет не изменяться, а уже возникать местное электрическое поле<sup>3)</sup> и т.д.

Если много раз упоминавшееся специфическое силовое поле обусловлено существованием плюс-зарядов (обуславливающих притяжение электронов друг к другу и тем самым — возможность превращения их в связанную систему, изображенную на рис. 2.8) и если плюс-заряды индуцированы движением самих электронов<sup>4)</sup>,

1) Точно также поступают в зонной теории. Приписав для электронов кристалла определенную зависимость  $E_{\text{план}}(\vec{P})$ , “ликвидируют” поле идеально периодического потенциала ионов решетки.

2) Сопровождаемая автоматически пространственной флуктуирующей электронной концентрацией.

3) Как уже говорилось в конце п. 2.3.1.2, из-за огромной концентрации электронов возникающее вследствие нарушения электронейтральности поле простирается на ничтожное расстояние от центра возникшего заряда. То же самое относится к пространственной флуктуации концентрации электронов.

4) При отказе от адиабатического приближения при  $T = 0$  электроны можно в той же степени считать колеблющимися около своих “положений равновесия”, что и ионы решетки.

вполне разумно считать что мы имеем дело с плазмой разноименно заряженных частиц, инерционность которых того же порядка, что и свободных электронов. Тогда в роли упоминавшейся частоты выступает их плазменная частота

$$\omega = \omega_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot q^2 \cdot n}{m \cdot \epsilon_0}} \approx 10^{17} \text{ Гц.}$$

Поскольку в этом случае рассасывание заряда (и пространственной флуктуации концентрации носителей заряда) происходит за время порядка  $2\pi/\omega_{\text{пл}}$ , то в роли  $\tau_{\text{восст}}$  выступает обратная плазменная частота:

$$\tau_{\text{восст}} \approx \frac{2\pi}{\omega_{\text{пл}}} \approx 10^{-16} \text{ с.}$$

Что же касается времени свободного пробега  $\tau$ , то даже при  $T = 300 \text{ К}$  величина  $\tau \geq 10^{-13} \text{ с}$ . При низких температурах  $\tau$  еще больше.

Таким образом, в реальном сверхпроводнике реализуются условия

$$\tau \gg \Delta t_s \gg \tau_{\text{восст}} \approx \frac{2\pi}{\omega}.$$

В заключение отметим, что свойства внутреннего силового поля, которое мы ввели с целью обеспечить идеальную проводимость, оказались точно такими же, как и свойства поля, обеспечивающего сильную диамагнитную реакцию сверхпроводника.

## §2.8. Восстановление тока после акта рассеяния электрона

Из предыдущих параграфов следует вывод, что для реализации сверхпроводимости требуется охватить специфическим взаимодействием все те электроны, которые, оказавшись в нормальном металле в токонесящих состояниях, могут подвергаться рассеивающему действию дефектов. Сейчас мы установим, в какой именно области  $V$ -пространства располагаются упомянутые состояния.

В целях большей наглядности допустим, что максимальная плотность тока ( $J_{\text{макс}}$ ) никогда не будет превышать  $10^8 \text{ А/см}^2$ , чему отвечает дрейфовая скорость  $V_{\text{др.макс}} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ . Из дальнейшего станет ясно, зачем взято такое численное значение, а пока лишь за-

метим, что есть металлы, для которых оно и впрямь близко к тому значению  $V_{др}$ , при котором происходит разрушение сверхпроводимости током при  $T \rightarrow 0$ .

Далее мы допустим, что процессы перераспределения электронов по  $\vec{V}$ -состояниям (какой бы причиной они ни вызывались) происходят при температуре  $T$ , удовлетворяющей соотношению

$$k_B \cdot T \ll \hbar \omega_D \ll F, \quad (2.62)$$

где  $\omega_D$  — дебаевская частота,  $F$  — уровень Ферми,  $k_B$  и  $\hbar$  — постоянны Больцмана и Планка.

Справедливо считать, что если выключить процессы рассеяния и охладить нормальный металл до абсолютного нуля, его электроны станут свободными и будут находиться в состояниях только внутри Ферми-шара радиуса  $V_F$  (рис. 2.11). Вызовем с помощью кратковременного действия электрического поля ток плотностью  $J_{\max}$ . Чтобы адекватно отобразить описанную ситуацию, придется сместить Ферми-шар в  $\vec{V}$ -пространстве (например, вдоль оси  $V_x$ ) на величину  $V_{др, \max}$ , очень маленькую ( $= 2 \cdot 10^4 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ ) по сравнению с  $V_F$  ( $= 10^8 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ ). Теперь включим процессы рассеяния. Заметим, что даже при наиболее неупругом рассеянии электрона (на дебаевском фоне) энергия электрона изменяется не более чем на величину  $\pm \hbar \cdot \omega_D$ .

Найдем максимальное изменение абсолютного значения скорости электрона ( $\Delta V_{\max}$ ) при рассеянии. Как следует из рис. 2.11, максимальная скорость  $V_{\max}$ , которая может оказаться у электрона до рассеяния, равна

$$V_{\max} = V_F + V_{др, \max}.$$

Согласно закону сохранения энергии до и после наиболее неупругого столкновения фонона с электроном, например, с передачей энергии последнему

$$\frac{m \cdot (V_F + V_{др, \max} + \Delta V_{\max})^2}{2} = \frac{m \cdot (V_F + V_{др, \max})^2}{2} + \hbar \cdot \omega_D.$$

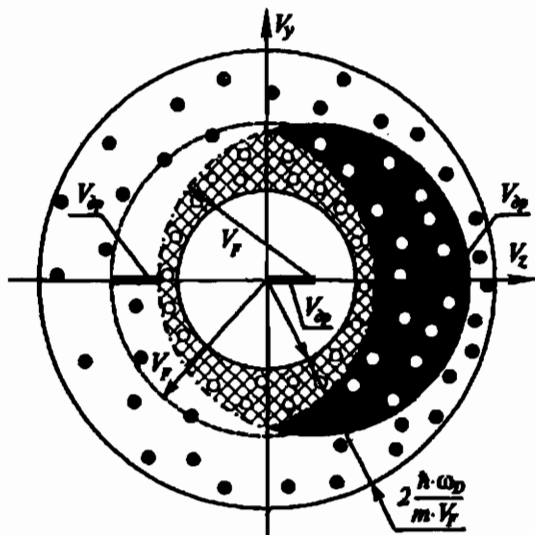


Рис. 2.11. Распределение электронов по скоростям после исчезновения электрического поля и включения рассеивающего действия дефектов ("моментальный снимок").

Токонесущие состояния находятся в сильно зачерненной области (на самом деле чрезвычайно узкой); свободные состояния, в которые электроны могут переходить в результате столкновений с дефектами, находятся в светлой области

между окружностью радиуса  $V_F + \frac{\hbar \cdot \omega_D}{m \cdot V_F}$  и смещенной окружностью радиуса  $V_F$ . Предполагено, что внутри круга радиуса

$(V_F - \frac{\hbar \cdot \omega_D}{m \cdot V_F})$  степень заполнения  $\tilde{N}(\vec{V}) = 1$ , а вне круга ра-

диуса  $(V_F + \frac{\hbar \cdot \omega_D}{m \cdot V_F})$  величина  $\tilde{N}(\vec{V}) = 0$ .

Черные точки — состояния, в которые электроны рассеялись; светлые кружки — состояния, из которых электроны рассеялись. Интервал фермиевских состояний —

это сферический слой толщиной  $\frac{2 \hbar \cdot \omega_D}{m \cdot V_F}$  и объемом

$$= 4\pi \cdot V_F^2 \cdot \frac{2 \hbar \cdot \omega_D}{m \cdot V_F} = \frac{8\pi}{m} \cdot \hbar \cdot \omega_D \cdot V_F.$$

Отсюда с учетом неравенств (7.1) следует, что

$$\Delta V_{\text{макс}} = \frac{\hbar \cdot \omega_D}{m \cdot (V_F + V_{\text{др.макс}})} \approx \frac{\hbar \cdot \omega_D}{m \cdot V_F}.$$

Сравним величины  $\Delta V_{\text{макс}}$  и  $V_{\text{др.макс}}$ , положив:  $\hbar \cdot \omega_D = 0,02$  эВ;  $F = 3$  эВ;  $V_F = 1,5 \cdot 10^8 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ . Тогда  $\left( \frac{V_{\text{др.макс}}}{\Delta V_{\text{макс}}} \right) = 4 \cdot 10^{-2}$ . Это соотношение, а также неравенство (2.62) и дают возможность считать, что перераспределение электронов по состояниям  $\vec{V}$ -пространства в результате действия электрического поля и дефектов происходит практически лишь внутри тонкого сферического слоя (толщиной  $2 \frac{\hbar \cdot \omega_D}{m \cdot V_F}$ ) около Ферми-поверхности. Все состояния, входящие в этот слой, будем называть фермиевскими. Совершенно очевидно, что взаимодействие между электронами, призванное ликвидировать рассеивающий эффект, достаточно распространить лишь на упомянутый сферический слой<sup>1)</sup>.

Попробуем теперь на очень простом примере разобраться, к чему именно приводит акт рассеяния и чего именно в этой связи следует ожидать от межэлектронного взаимодействия. Сконструируем такое распределение электронов по скоростям, чтобы

$$\bar{N}(\vec{V}, t < t_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } V < V_F, \\ 0 & \text{при } V > V_F, \end{cases}$$

причем усредненное по объему образца значение плотности тока  $\langle \vec{J}(t > t_0) \rangle_v = 0$ .

Пусть в момент  $t$  в результате случайного столкновения электрона с дефектом изменятся степени заполнения всего двух состояний

<sup>1)</sup> Если  $V_{\text{др.макс}} > \Delta V_{\text{макс}}$ , взаимодействие нужно распространять на значительную часть зоны проводимости. По-видимому это и имеет место в случае высокотемпературной сверхпроводимости (см. Приложение 3).

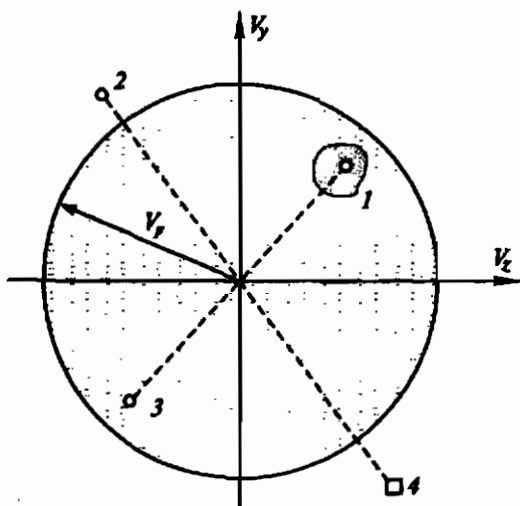


Рис. 2.12. Изменение степеней заполнения в момент  $t_0$

Внутри круга радиуса  $V_F$  для всех  $\vec{V}$ :  $\bar{n}(\vec{V}, t < t_0) = 1$ , а вне круга для всех  $\vec{V}$ :  $\bar{n}(\vec{V}, t < t_0) = 0$ . В результате случайного столкновения электрона с дефектом в момент  $t_0$ :

$$\bar{n}(\vec{V}_1, t = t_0) = 0, \bar{n}(\vec{V}_2, t = t_0) = 1$$

(рис. 2.12). Этому новому распределению будет отвечать уже отличная от нуля величина  $\langle \vec{J}(t > t_0) \rangle_v$ :

$$\langle \vec{J}(t > t_0) \rangle_v = \frac{q}{v} \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3).$$

Каким способом могла бы восстановиться прежняя бестоковая ситуация? Например, в результате одного из последующих актов рассеяния: ведь не исключено, что наступит момент, когда

$$\langle \vec{J}(t > t_0) \rangle_v = 0.$$

Однако при случайном характере столкновений электронов с дефектами возникновение таким образом бестоковой ситуации очень

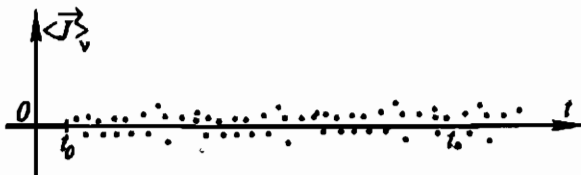


Рис. 2.13. Флуктуация средней (по объему образца) плотности тока с момента ( $t_0$ ) запуска процесса рассеяния

В момент  $t_0$  величина  $\langle \vec{J} \rangle_v$  случайно оказалась равной нулю

маловероятно (рис. 2.13). А уж непрерывное ее сохранение — совершенно невероятно.

Чтобы бестоковая ситуация восстанавливалась быстро и гарантированно<sup>1)</sup>, нужно существование взаимодействия; и теперь ясно, к чему именно оно должно приводить:

— либо к возврату электрона из состояния 2 в состояние 1 (рис. 2.12);

— либо к переходу электрона из состояния 3 в состояние 4 (рис. 2.12).

Как видим, обязательное условие поддержания бестоковой ситуации — это быстрое и неслучайное восстановление после акта рассеяния одинаковости степеней заполнения всех таких пар  $\vec{V}$ -состояний, для которых

$$\vec{V}_i + \vec{V}_j = 0.$$

Назовем подобные два состояния одним спаренным.

Обратимся теперь к такой исходной ситуации, когда  $\langle \vec{J}(t < t_0) \rangle_v \neq 0$  (рис. 2.14). Легко видеть, что для систематического (после каждого акта рассеяния) поддержания равенства

$$\langle \vec{J}(t \geq t_0) \rangle_v = \text{const} \neq 0$$

<sup>1)</sup> Если бы в сверхпроводнике (в кольцеобразном образце) случайно возник ток, то он не смог бы затухнуть, если бы бестоковое состояние образца не поддерживалось столь же жестко, сколь состояние с током, индуцированным внешним полем.



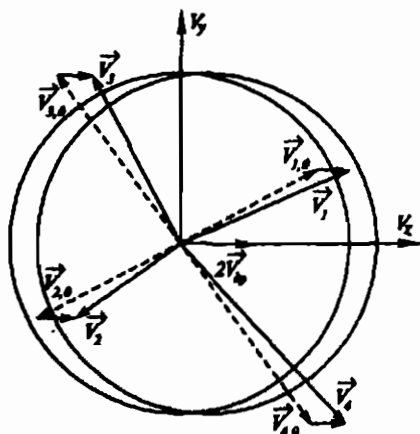


Рис. 2.14. Восстановление тока

Исходной ситуации ( $t_0, \langle \vec{J} \rangle_v \neq 0$ ) отвечает круг, центр которого смещен вправо на величину  $V_{др}$ . Предполагается, что все состояния внутри этого круга заняты. Кроме того,  $\bar{n}(\vec{V}_{2,0}) = \bar{n}(\vec{V}_{3,0}) = \bar{n}(\vec{V}_{4,0}) = \bar{n}(\vec{V}_3) = \bar{n}(\vec{V}_4) = 0$ ;  $\bar{n}(\vec{V}_{1,0}) = \bar{n}(\vec{V}_1) = \bar{n}(\vec{V}_2) = 1$ . Изменения, которые произошли в момент ( $t_0 + dt$ ), состоят в том, что  $\bar{n}(\vec{V}_1) = 0, \bar{n}(\vec{V}_3) = 1$ .

Для восстановления плотности тока, соответствующей исходной ситуации и при том за счет лишь одного перехода, необходимы либо переход  $\vec{V}_3 \rightarrow \vec{V}_1$  (обратный тому, который произошел в момент  $t_0$ ), либо переход  $\vec{V}_2 \rightarrow \vec{V}_4$ .

Хорошо видно из построений, что состояния  $\vec{V}_3$  и  $\vec{V}_4$  образуются из двух состояний  $\vec{V}_{3,0}$  и  $\vec{V}_{4,0}$ , которые могут быть объединены в одно — спаренное. Точно так же и состояния  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  образуются из объединенных в спаренное состояний  $\vec{V}_{1,0}$  и  $\vec{V}_{2,0}$ .

требуется постоянная одинаковость степеней заполнения всех тех состояний, для которых

$$\vec{V}_i + \vec{V}_j = 2 \vec{V}_{др}.$$

Из построений на рис. 2.14 следует, что это те же самые состояния, которые в отсутствие тока образуют состояния спаренные.

## Глава 3. ГАМИЛЬТониАН МЕЖЭЛЕКТРОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ<sup>1)</sup>

### §3.1. Преобразование гамильтониана

#### 3.1.1. Исходный гамильтониан

В фундаментальных курсах по квантовой теории разъясняется, что взаимодействие точечных массивных частиц друг с другом возникает вследствие обмена каждой частицы с каждой из остальных квантами полей (“квазичастицами”). При этом каждая из ранее невзаимодействовавших точечных частиц приобретает потенциальную энергию взаимодействия со всеми остальными частицами, и все они оказываются связанными друг с другом.

Применительно к металлу речь может идти об электронах проводимости и квантах звука — фононах. Считая, что читатель этой книги достаточно хорошо знает теорию свободных фононов<sup>2)</sup>, сразу же перейдем к формулировке различных упрощений.

Допустим, что энергия фонона  $E_\Phi$ , его импульс  $\vec{P}_\Phi$  и скорость  $\vec{s}$  связаны соотношением  $E_\Phi = \vec{P}_\Phi \cdot \vec{s}$ , причем  $s = \text{const}$ , а направления векторов  $\vec{P}_\Phi$  и  $\vec{s}$  всегда совпадают, из-за чего  $E_\Phi = P_\Phi \cdot s$ . Кроме того допустим, что  $0 \leq P_\Phi \leq P_D$ , причем

$$P_D = \frac{\hbar \cdot \omega_D}{s} = \frac{2\pi \cdot \hbar}{a},$$

где  $\omega_D$  ( $\approx 10^{13}$  Гц) — дебаевская частота,  $a$  — постоянная решетки кристалла.

---

1) Эта глава является отступлением от основной темы книги. Возможно, однако, что читатель согласится считать такое отступление оправданным, если ознакомится с двумя работами, содержащими, на наш субъективный взгляд, наиболее подробный по сравнению с другими книгами и статьями вывод гамильтониана, используемого при установлении основного состояния электронного коллектива сверхпроводника: Ч. Киттель, Квантовая теория твердых тел. М., Наука, Физматгиз, 1967. сс. 180—183; Теория сверхпроводимости. Сб. статей. М., ИЛ., 1960, сс. 37—47.

2) Знакомство с теорией фононов, взаимодействующих друг с другом, не является необходимым для дальнейшего чтения.

Исходный гамильтониан коллектива свободных фононов и взаимодействующих друг с другом электронов проводимости металла запишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{исх}} = & s \cdot \sum_{\vec{P}_\Phi} P_\Phi \cdot \left( a_{\vec{P}_\Phi}^+ a_{\vec{P}_\Phi} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2m} \cdot \sum_{\vec{P}} P^2 \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} + \\ & + i \cdot \sum_{\vec{P}_\Phi} D \cdot \left\{ \sum_{\vec{P}_j, \vec{P}_j \neq \vec{P}_i} (c_{\vec{P}_j}^+ - c_{\vec{P}_i} c_{\vec{P}_j} a_{\vec{P}_\Phi}^+ - c_{\vec{P}_i}^+ + c_{\vec{P}_j} c_{\vec{P}_i} a_{\vec{P}_\Phi}) + \right. \\ & \left. + \sum_{\vec{P}_k, \vec{P}_k \neq \vec{P}_i} (c_{\vec{P}_i}^+ - c_{\vec{P}_i} c_{\vec{P}_k} a_{\vec{P}_\Phi}^+ - c_{\vec{P}_k}^+ + c_{\vec{P}_k} c_{\vec{P}_i} a_{\vec{P}_\Phi}) \right\}. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Здесь:  $i \equiv \sqrt{-1}$ ;  $c_{\vec{P}}^+$  и  $c_{\vec{P}}$  — операторы, соответственно, исчезновения электрона из  $\vec{P}$ -состояния и возникновения электрона в  $\vec{P}$ -состоянии;  $a_{\vec{P}_\Phi}^+$  и  $a_{\vec{P}_\Phi}$  — операторы, соответственно, исчезновения фонона из  $\vec{P}_\Phi$ -состояния и возникновения фонона в  $\vec{P}_\Phi$ -состоянии.

Что касается величины  $D$ , то

$$D \equiv \sqrt{\frac{2 \epsilon^2 \cdot E_\Phi}{9 M_{\text{ат}} \cdot s^2 \cdot N_{\text{ат}}}}, \quad (3.2)$$

где  $M_{\text{ат}}$  — масса одного атома (иона) кристаллической решетки образца металла;  $N_{\text{ат}}$  — число всех атомов (ионов) образца (если объем последнего бесконечно велик, то и  $N_{\text{ат}} \rightarrow \infty$ );  $\epsilon$  — характеристическая энергия, по порядку величины равная  $\frac{\hbar^2}{2m \cdot a^2} = 1 \text{эВ}$ .<sup>1)</sup>

Далее в выражении (3.1) первое слагаемое представляет собой оператор энергии коллектива свободных фононов. Второе и третье слагаемые представляют собой операторы кинетической энергии коллектива электронов и потенциальной энергии взаимодействия каждого из них со всеми остальными. Как уже говорилось, подобное взаимодействие вполне разумно считать обусловленным обменом

<sup>1)</sup> С подробными (в деталях) расчетом величин  $D$  можно ознакомиться, например, по книге: В.Г. Левич, Ю.А. Вдовин, В.А. Мямлин, Курс теоретической физики, т. II (§§ 114, 115), М., Физматгиз, 1962.

фононом между каждыми двумя электронами. В одном случае электрон, пребывавший в состоянии с импульсом  $\vec{P}_j$ , испускает фотон, передавая ему импульс  $\vec{P}_\Phi$  и переходя в результате в состояние с импульсом  $(\vec{P}_j - \vec{P}_\Phi)$ . В этом процессе одна частица исчезает (из  $\vec{P}_j$ -состояния), что описывается оператором  $c_{\vec{P}_j}$ , а две частицы возникают (в  $(\vec{P}_j - \vec{P}_\Phi)$ -состоянии и в  $\vec{P}_\Phi$ -состоянии), что описывается операторами  $c_{\vec{P}_j - \vec{P}_\Phi}^+$  и  $a_{\vec{P}_\Phi}^+$ . Далее, испущенный фотон поглощается электроном, пребывавшим до того в  $\vec{P}_l$ -состоянии. В этом процессе исчезают две частицы (из  $\vec{P}_l$ -состояния и  $\vec{P}_\Phi$ -состояния), а возникает одна — электрон (в  $(\vec{P}_l + \vec{P}_\Phi)$ -состоянии).

В другом случае фотон с импульсом  $\vec{P}_\Phi$  испускается уже тем электроном, который пребывал в  $\vec{P}_l$ -состоянии, а поглощается этот фотон электроном, пребывавшим в  $\vec{P}_k$ -состоянии.

Поскольку электронные импульсы  $\vec{P}_j$ ,  $\vec{P}_k$ ,  $\vec{P}_l$  принадлежат общему  $\vec{P}$ -пространству, оператор потенциальной энергии целесообразно представить в виде

$$i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_\Phi} D \cdot (c_{\vec{P} - \vec{P}_\Phi}^+ c_{\vec{P}} a_{\vec{P}_\Phi}^+ - c_{\vec{P} + \vec{P}_\Phi}^+ c_{\vec{P}} a_{\vec{P}_\Phi}) \equiv \hat{H}_1. \quad (3.3)$$

Введем также обозначение

$$s \cdot \sum_{\vec{P}_\Phi} P_\Phi \cdot (a_{\vec{P}_\Phi}^+ a_{\vec{P}_\Phi} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2m} \cdot \sum_{\vec{P}} P^2 \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} \equiv \hat{H}_0. \quad (3.4)$$

Процессы, в которых электроны обмениваются фононом, символически представлены на рис. 3.1.

### 3.1.2. Преобразование исходного гамильтониана

Одной из основных задач квантового описания какой-либо системы является установление всего множества разрешенных точных значений ее полной энергии (энергетических уровней) или хотя бы средних значений полной энергии. Для того и другого совершенно

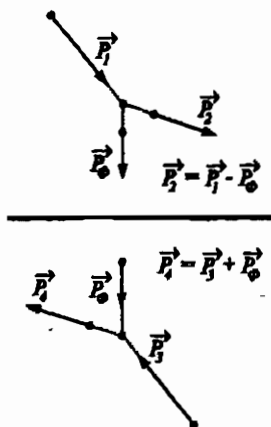


Рис. 3.1. Пример взаимодействия двух электронов:  
 а — процесс с испусканием фонона; при этом:

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_1 - \vec{P}_\Phi; E(\vec{P}_2) = (\vec{P}_1 - \vec{P}_\Phi)^2 / 2m; E(\vec{P}_1) = (P_1^2 / 2m);$$

б — процесс с поглощением фонона; при этом:

$$\vec{P}_4 = \vec{P}_3 + \vec{P}_\Phi; E(\vec{P}_4) = (\vec{P}_3 + \vec{P}_\Phi)^2 / 2m; E(\vec{P}_3) = (P_3^2 / 2m).$$

Из рисунка видно, что если до испускания-поглощения фонона электроны находились в спаренных состояниях ( $\vec{P}_3 = -\vec{P}_1$ ), то и после они останутся в спаренных же состояниях ( $\vec{P}_4 = -\vec{P}_2$ )

необходимо знать гамильтониан системы. И вот в том случае, когда гамильтониан содержит оператор, описывающий взаимодействие частиц друг с другом<sup>1)</sup>, стандартным приемом, позволяющим рассчитать полную энергию с приемлемой точностью, является преобразование подобного гамильтониана к такому виду, что система даже сильно взаимодействующих частиц предстает либо как система свободных, но уже квазичастиц, либо как система тех же частиц, но взаимодействующих по другому закону, причем настолько слабо, что соответствующий этому новому закону оператор в преобразованном гамильтониане явно играет роль слабого возмущения.

Очень часто для преобразования исходного гамильтониана используют так называемое унитарное преобразование

$$\hat{H}_{\text{преобраз}} = e^{-\hat{S}} \hat{H}_{\text{исх}} e^{\hat{S}}, \quad (3.5)$$

где  $\hat{S}$  — неизвестный пока оператор, относительно которого мы тем не менее сделаем традиционное предположение, что

$$|\langle \Psi | \hat{S} | \Psi \rangle| < 1, \quad (3.6)$$

где  $|\Psi\rangle$  — один из векторов состояния той системы, которой был поставлен в соответствие исходный гамильтониан<sup>2)</sup>. Отметим, что на

1) Например, ионов с ионами в кристалле.

2) В учебных пособиях по квантовой теории доказывают, что

$$\langle \Psi | (e^{-\hat{S}} \hat{H} e^{\hat{S}}) | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle.$$

данном этапе не требуется никаких сведений о конкретном виде вектора  $|\Psi\rangle$ .

Теперь разложим  $e^{-\hat{S}}$  и  $e^{\hat{S}}$  в формуле (3.5) в степенные ряды. Обозначим

$$\hat{H}_{\text{преобраз}} \equiv \hat{H}.$$

Итак,

$$\hat{H} = (1 - \hat{S} + \frac{(\hat{S})^2}{2} + \hat{S}_{\text{ост}})(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)(1 + \hat{S} + \frac{(\hat{S})^2}{2} + \hat{S}_{\text{ост}}). \quad (3.7)$$

Здесь символом  $\hat{S}_{\text{ост}}$  обозначена сумма всех остальных членов разложения. Раскрывая скобки в (3.7), получаем:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + (\hat{H}_0 \hat{S} - \hat{S} \hat{H}_0) + (\hat{H}_1 \hat{S} - \hat{S} \hat{H}_1) - \hat{S} \hat{H}_0 \hat{S} + \\ & + \frac{1}{2} [\hat{H}_0 (\hat{S})^2 + (\hat{S})^2 \hat{H}_0] + \hat{f}_{\text{ост}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Символом  $\hat{f}_{\text{ост}}$  обозначен "остаток" — величина

$$\begin{aligned} & (1 - \hat{S} + \frac{(\hat{S})^2}{2} + \hat{S}_{\text{ост}})(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)\hat{S}_{\text{ост}} + \\ & + \hat{S}_{\text{ост}}(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)(1 + \hat{S} + \frac{(\hat{S})^2}{2} + \hat{S}_{\text{ост}}). \end{aligned}$$

Логично допустить, как следствие предположения (3.6), что слагаемые  $\hat{H}_1$ ,  $\hat{H}_0 \hat{S}$ ,  $\hat{S} \hat{H}_0$  в выражении (3.8) окажутся — каждое, как говорят, "порядка  $\hat{S}$ ". Тогда последующие слагаемые (кроме  $\hat{f}_{\text{ост}}$ ) окажутся — каждое — порядка  $(\hat{S})^2$ , а слагаемое  $\hat{f}_{\text{ост}}$  — еще более высокого порядка. Если уповать на сходимость ряда операторов  $\hat{S}$ <sup>1)</sup>, можно отбросить  $\hat{S}_{\text{ост}}$ , а тем самым и  $\hat{f}_{\text{ост}}$  как в высшей степени малую величину.

Заметим теперь, что слагаемые порядка  $\hat{S}$  внесут больший вклад в энергию, чем слагаемые порядка  $(\hat{S})^2$ . Поэтому для реализации той цели преобразования гамильтониана, о котором говорилось в начале п. 3.1.2, самое лучшее — это положить:

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_0 \hat{S} - \hat{S} \hat{H}_0 = 0, \quad (3.9)$$

1) А это зависит от того, является ли величина  $\langle \Psi | \hat{S} | \Psi \rangle$  большей или меньшей единицы.

после чего гамильтониан преобразуется к желаемому виду:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \left\{ \hat{H}_1 \hat{S} - \hat{S} \hat{H}_1 + \frac{1}{2} \left( \hat{H}_0 (\hat{S})^2 + (\hat{S})^2 \hat{H}_0 \right) - \hat{S} \hat{H}_0 \hat{S} \right\}, \quad (3.10)$$

где величина в фигурных скобках является добавкой более высокого, чем  $\hat{H}_1$  порядка малости. В таком случае неравенство

$$\begin{aligned} \langle \Psi_A | \hat{H}_0 | \Psi_B \rangle \gg \langle \Psi_A | \left\{ \hat{H}_1 \hat{S} - \hat{S} \hat{H}_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \hat{H}_0 (\hat{S})^2 + (\hat{S})^2 \hat{H}_0 \right) - \hat{S} \hat{H}_0 \hat{S} \right\} | \Psi_B \rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

обеспечено при условии (аналогичном (3.6))

$$|\langle \Psi_A | \hat{S} | \Psi_B \rangle| < 1, \quad (3.12)$$

требуемом для оправдания отбрасывания величины  $\hat{S}_{\text{ост}}$ .

Заметим, что индексы  $A$  и  $B$  при  $\langle \Psi |$  и  $| \Psi \rangle$  в соотношениях (3.11) и (3.12) использованы только для того, чтобы иметь возможность написать в символической форме матричный элемент.

Выражение (3.10) удобно представить в компактной форме с помощью обозначения

$$\hat{H}_1 \hat{S} - \hat{S} \hat{H}_1 = [[\hat{H}_1, \hat{S}]].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \left( \hat{H}_0 (\hat{S})^2 - \hat{S} \hat{H}_0 \hat{S} \right) + \left( (\hat{S})^2 \hat{H}_0 - \hat{S} \hat{H}_0 \hat{S} \right) \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left\{ \left( \hat{H}_0 \hat{S} - \hat{S} \hat{H}_0 \right) \hat{S} + \hat{S} \left( \hat{S} \hat{H}_0 - \hat{H}_0 \hat{S} \right) \right\}, \end{aligned}$$

причем правая часть с учетом условия (3.9) равна

$$\frac{1}{2} \left\{ \hat{S} \hat{H}_1 - \hat{H}_1 \hat{S} \right\} = -\frac{1}{2} [[\hat{H}_1, \hat{S}]].$$

Итак,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{1}{2} [[\hat{H}_1, \hat{S}]]. \quad (3.13)$$

Теперь необходимо решить наиболее трудную часть всей задачи по преобразованию гамильтониана: установить явный вид оператора  $\hat{S}$ , удовлетворяющего условиям (3.6) и (3.9). Для этого воспользуемся одной из аксиом математической схемы квантовой теории: оператор

известен, если известен его представитель, то есть множество матричных элементов

$$\langle \Psi_m | \hat{S} | \Psi_n \rangle,$$

в которых векторы  $|\Psi_n\rangle$  образуют полный набор<sup>1)</sup>. Таковыми являются собственные векторы оператора  $\hat{H}_0$ , соответствующего системе, состоящей из свободных электронов и свободных фононов. Обозначим эти векторы символами

$$\dots |\Psi_l\rangle, |\Psi_m\rangle, |\Psi_n\rangle, \dots$$

Из уравнения (3.9) следует, что

$$\langle \Psi_n | \hat{H}_1 | \Psi_m \rangle = \langle \Psi_n | (\hat{S} \hat{H}_0 - \hat{H}_0 \hat{S}) | \Psi_m \rangle. \quad (3.14)$$

С помощью единичного оператора

$$\sum_s |\Psi_s\rangle \langle \Psi_s| \quad (2)$$

представим такое слагаемое из выражения (3.14), как, например,  $\langle \Psi_n | (\hat{S} \hat{H}_0) | \Psi_m \rangle$  в виде:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_n | (\hat{S} \hat{H}_0) | \Psi_m \rangle &= \langle \Psi_n | \hat{S} \left( \sum_s |\Psi_s\rangle \langle \Psi_s| \right) \hat{H}_0 | \Psi_m \rangle = \\ &= \sum_s \langle \Psi_n | \hat{S} | \Psi_s \rangle \langle \Psi_s | \hat{H}_0 | \Psi_m \rangle = \sum_s \langle \Psi_n | \hat{S} | \Psi_s \rangle \cdot \delta_{sm} \cdot E_m = \\ &= \langle \Psi_n | \hat{S} | \Psi_m \rangle \cdot E_m, \end{aligned}$$

где  $E_m$  — полная энергия коллектива свободных электронов и свободных фононов (находящегося в состоянии, которому отвечает вектор  $|\Psi_m\rangle$ ), являющаяся решением уравнения

$$\hat{H}_0 | \Psi_m \rangle = E_m \cdot | \Psi_m \rangle; \quad (3.15)$$

1) Векторы  $\dots |\Psi_m\rangle, |\Psi_n\rangle, \dots$  образуют полный набор, если любой вектор  $|B\rangle$  можно представить в виде  $|B\rangle = \sum_m c_m \cdot |\Psi_m\rangle$ , где все  $c_m$  — числа.

2) Если векторы  $|\Psi_s\rangle$  образуют полный набор, то  $\sum_s |\Psi_s\rangle \langle \Psi_s| = 1$ . В данном случае векторы  $|\Psi_s\rangle$  взяты из того же (полного) набора, что и векторы  $|\Psi_m\rangle$ .



$$\delta_{sm} \equiv \langle \Psi_s | \Psi_m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } s = m, \\ 0 & \text{при } s \neq m, \end{cases}$$

поскольку все собственные векторы оператора  $\hat{H}_0$  ортонормированы.

Теперь используем оператор  $\sum_s |\Psi_s\rangle \langle \Psi_s|$  для разделения  $\hat{H}_0$  и  $\hat{S}$  во втором слагаемом выражения (3.14). В результате получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \Psi_n | \hat{H}_1 | \Psi_m \rangle &= \langle \Psi_n | \hat{S} | \Psi_m \rangle \cdot E_m - E_n \cdot \langle \Psi_n | \hat{S} | \Psi_m \rangle = \\ &= (E_m - E_n) \cdot \langle \Psi_n | \hat{S} | \Psi_m \rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Таким образом, из (3.16) следует, что

$$\langle \Psi_n | \hat{S} | \Psi_m \rangle = \frac{\langle \Psi_n | \hat{H}_1 | \Psi_m \rangle}{E_m - E_n}. \quad (3.17)$$

В выражении (3.17) правая часть должна считаться известной (мы знаем все присутствующие там величины:  $\langle \Psi_n |$ ,  $|\Psi_m \rangle$ ,  $E_n$ ,  $E_m$  — из уравнения (3.15), а операторы  $\hat{H}_1$  и  $\hat{H}_0$  заданы заранее), и тем самым нам известен матричный элемент оператора  $\hat{S}$ .

Перепишем уравнение (3.17), раскрыв оператор  $\hat{H}_1$ , согласно выражению (3.3):

$$\begin{aligned} \langle \Psi_n | \hat{S} | \Psi_m \rangle &= \frac{\langle \Psi_n | \left( i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_\Phi} D \cdot \frac{c^+}{\vec{P} - \vec{P}_\Phi} \frac{c}{\vec{P}} \frac{a^+}{\vec{P}_\Phi} \right) | \Psi_m \rangle}{E_m - E_n} - \\ &= \frac{\langle \Psi_n | \left( i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_\Phi} D \cdot \frac{c^+}{\vec{P} + \vec{P}_\Phi} \frac{c}{\vec{P}} \frac{a}{\vec{P}_\Phi} \right) | \Psi_m \rangle}{E_m - E_n}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Займемся первым слагаемым правой части (3.18). Присутствие операторов  $\frac{c^+}{\vec{P} - \vec{P}_\Phi}$ ,  $\frac{c}{\vec{P}}$ ,  $\frac{a}{\vec{P}_\Phi}$  подсказывает вид тех векторов  $|\Psi_m\rangle$  и  $\langle \Psi_n|$ , с помощью которых только и можно получить

отличные от нуля матричные элементы оператора  $\hat{H}_1$  :

$$|\Psi_m\rangle = \left[ |(M-1)_{\text{фон-н}}\rangle_{\vec{P}'_\Phi}, (N_{\text{фон-н}})_{\vec{P}'_\Phi, \vec{P}'_\Phi}, (1_{\text{эл-н}})_{\vec{P}'}, (0_{\text{эл-нов}})_{\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi}, (N_{\text{эл-нов}})_{\vec{P}'_\Phi, \vec{P}'_\Phi} \right], \quad (3.19,а)$$

$$\langle\Psi_n| = \left\langle (M_{\text{фон-н}})_{\vec{P}'_\Phi}, (N_{\text{фон-н}})_{\vec{P}'_\Phi, \vec{P}'_\Phi}, (0_{\text{эл-н}})_{\vec{P}'}, (1_{\text{эл-н}})_{\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi}, (N_{\text{эл-нов}})_{\vec{P}'_\Phi, \vec{P}'_\Phi} \right|. \quad (3.19,б)$$

Здесь символы  $(0_{\text{эл-нов}})_{\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi}$ ,  $(1_{\text{эл-н}})_{\vec{P}'}$  означают соответственно отсутствие электронов в состоянии с импульсом, равным  $\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi$ , и присутствие одного электрона в состоянии с импульсом  $\vec{P}'$ . В прочих состояниях присутствует  $N$  электронов.  $M$  фононов присутствует в состоянии с импульсом  $\vec{P}'_\Phi$ , причем  $M \geq 1$ , а в прочих состояниях присутствует  $N$  фононов.

Используя при решении уравнения (3.15) векторы  $|\Psi_m\rangle$  и  $\langle\Psi_n|$  в виде (3.19), находим, что

$$E_m = \frac{P'^2}{2m} + (M-1) \cdot P_{\Phi'} \cdot s = E(\vec{P}') + (M-1) \cdot E_{\Phi'},$$

$$E_n = \frac{(\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi)^2}{2m} + M \cdot P_{\Phi'} \cdot s = E(\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi) + M \cdot E_{\Phi'}, \quad 1)$$

и тогда  $E_m - E_n = E(\vec{P}') - E(\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi) - E_{\Phi'}$ .

Что касается числителя в первом слагаемом правой части (3.18), то из обеих сумм лишь единственное слагаемое

$$i \cdot D \cdot c^+_{\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi} \cdot c_{\vec{P}'} \cdot a^+_{\vec{P}'_\Phi}$$

обладает ненулевым матричным элементом, построенным на векторах  $|\Psi_m\rangle$  и  $\langle\Psi_n|$ , заданных выражениями (3.19):

$$\langle\Psi_n| \left( i \cdot D \cdot c^+_{\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi} \cdot c_{\vec{P}'} \cdot a^+_{\vec{P}'_\Phi} \right) |\Psi_m\rangle = i \cdot D \cdot \sqrt{M}.$$

1) Установить, чему равны  $E_m$  и  $E_n$ , легко из одного лишь вида векторов  $|\Psi_m\rangle$  и  $\langle\Psi_n|$ .

Далее, поскольку

$$\left( \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}'} c_{\vec{P}+\vec{P}_\Phi}^+ c_{\vec{P}} a_{\vec{P}_\Phi} \right) |\Psi_m\rangle \neq |\Psi_n\rangle,$$

а векторы  $|\Psi_n\rangle$  и  $|\Psi_m\rangle$  ортонормированы ( $\langle \Psi_n | \Psi_m \rangle = \delta_{n,m}$ ), числитель второго слагаемого правой части (3.18) равен нулю.

Таким образом,

$$\langle \Psi_n | \hat{S} | \Psi_m \rangle = \frac{i \cdot D \cdot \sqrt{M}}{E(\vec{P}') - E(\vec{P}' - \vec{P}_\Phi') - E_{\Phi'}}. \quad (3.20)$$

Поскольку второе слагаемое (3.18) оказалось равным нулю, еще один матричный элемент оператора  $\hat{H}_1$  получим с помощью векторов

$$|\Psi_p\rangle = \left[ M_{\text{фон-в}} \right]_{\vec{P}_\Phi'}^{\rightarrow}, \left[ N_{\text{фон-в}}' \right]_{\vec{P}_\Phi, \vec{P}_\Phi'}^{\rightarrow}, \left[ (1_{\text{эл-н}}) \right]_{\vec{P}''}^{\rightarrow}, \left[ (0_{\text{эл-нов}}) \right]_{\vec{P}'' + \vec{P}_\Phi'}^{\rightarrow}, \left[ N_{\text{эл-нов}}' \right]_{\vec{P} \neq \vec{P}'' + \vec{P}_\Phi'}^{\rightarrow}, \left[ \vec{P}_\Phi, \vec{P}'' \right] \right], \quad (3.21, a)$$

$$\langle \Psi_r | = \left\langle \left[ (M-1)_{\text{фон-в}} \right]_{\vec{P}_\Phi'}^{\rightarrow}, \left[ N_{\text{фон-в}}' \right]_{\vec{P}_\Phi, \vec{P}_\Phi'}^{\rightarrow}, \left[ (0_{\text{эл-нов}}) \right]_{\vec{P}''}^{\rightarrow}, \left[ (1_{\text{эл-н}}) \right]_{\vec{P}'' + \vec{P}_\Phi'}^{\rightarrow}, \left[ N_{\text{эл-нов}}' \right]_{\vec{P} \neq \vec{P}'' + \vec{P}_\Phi'}^{\rightarrow}, \left[ \vec{P}_\Phi, \vec{P}'' \right] \right|, \quad (3.21, b)$$

где по-прежнему  $M \geq 1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_r | \left( i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_\Phi} D \cdot c_{\vec{P}+\vec{P}_\Phi}^+ c_{\vec{P}} a_{\vec{P}_\Phi} \right) | \Psi_p \rangle \\ \langle \Psi_r | \hat{S} | \Psi_p \rangle = - \frac{\langle \Psi_r | \left( i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_\Phi} D \cdot c_{\vec{P}+\vec{P}_\Phi}^+ c_{\vec{P}} a_{\vec{P}_\Phi} \right) | \Psi_p \rangle}{E_p - E_r} = \\ = - \frac{i \cdot D \cdot \sqrt{M}}{E(\vec{P}'') - E(\vec{P}'' + \vec{P}_\Phi') + E_{\Phi'}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Очевидно, что и все остальные, отличные от нуля матричные элементы операторов  $\hat{S}$  и  $\hat{H}_1$ , могут быть построены только на векторах типа тех, что заданы выражениями (3.19) и (3.21). Поэтому целесооб-

разно строить сразу пары матричных элементов операторов  $\hat{S}$  и  $\hat{H}_1$ . Учитывая сказанное, напишем:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_n | \hat{S} | \Psi_m \rangle + \langle \Psi_r | \hat{S} | \Psi_p \rangle &= \frac{\langle \Psi_n | \hat{H}_1 | \Psi_m \rangle}{E_m - E_n} + \frac{\langle \Psi_r | \hat{H}_1 | \Psi_p \rangle}{E_p - E_r} = \\ &= \frac{\langle \Psi_m | \left( i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}'_\Phi} D \cdot \frac{c_{\vec{P}}^+}{\vec{P} - \vec{P}'_\Phi} \frac{c_{\vec{P}}}{\vec{P}} \frac{a_{\vec{P}'_\Phi}^+}{\vec{P}'_\Phi} \right) | \Psi_n \rangle}{E(\vec{P}') - E(\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi) - E_{\Phi'}} - \\ &= \frac{\langle \Psi_r | \left( i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}'_\Phi} D \cdot \frac{c_{\vec{P} + \vec{P}'_\Phi}^+}{\vec{P}} \frac{c_{\vec{P}}}{\vec{P}} \frac{a_{\vec{P}'_\Phi}}{\vec{P}'_\Phi} \right) | \Psi_p \rangle}{E(\vec{P}'') - E(\vec{P}'' + \vec{P}'_\Phi) + E_{\Phi'}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Глядя на это уравнение с неизвестным  $\hat{S}$ , естественно предположить, что

$$\begin{aligned} \hat{S} = i \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}'_\Phi} D \cdot \left( \frac{\frac{c_{\vec{P}}^+}{\vec{P} - \vec{P}'_\Phi} \frac{c_{\vec{P}}}{\vec{P}} \frac{a_{\vec{P}'_\Phi}^+}{\vec{P}'_\Phi}}{E(\vec{P}') - E(\vec{P}' - \vec{P}'_\Phi) - E_{\Phi'}} - \right. \\ \left. - \frac{\frac{c_{\vec{P} + \vec{P}'_\Phi}^+}{\vec{P} + \vec{P}'_\Phi} \frac{c_{\vec{P}}}{\vec{P}} \frac{a_{\vec{P}'_\Phi}}{\vec{P}'_\Phi}}{E(\vec{P}'') - E(\vec{P}'' + \vec{P}'_\Phi) + E_{\Phi'}} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Подстановка (3.24) в уравнение (3.23), в котором  $|\Psi_m\rangle, |\Psi_n\rangle, |\Psi_p\rangle, |\Psi_r\rangle$  определены соотношениями (3.19), (3.21), обращает уравнение (3.23) в тождество, что и доказывает справедливость предположения (3.24).

Таким образом, преобразованный гамильтониан системы свободных фононов и взаимодействующих друг с другом электронов, учитывающий из всех возможных взаимодействий только то, что обусловлено обменом фононами, имеет вид (3.13), где  $\hat{H}_1, \hat{H}_0, \hat{S}$  определены выражениями (3.3), (3.4), (3.24) соответственно.

Необходимо, однако, обратить внимание на одно существенное обстоятельство. Выражение (3.13) справедливо, если в разложениях

величин  $e^{-\hat{S}}$  и  $e^{\hat{S}}$  можно отбросить  $\hat{S}_{\text{ост}}$ , после чего только и возникают “равенства”

$$e^{-\hat{S}} = 1 - \hat{S} + \frac{(\hat{S})^2}{2}; \quad e^{\hat{S}} = 1 + \hat{S} + \frac{(\hat{S})^2}{2}.$$

Отбрасывание же  $\hat{S}_{\text{ост}}$  в свою очередь допустимо при условии (3.12). Приняв, что оператор  $\hat{S}$  имеет вид (3.24), и тем самым считая известными все его матричные элементы, можно представить условие (3.12) в виде

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Psi_A | \left( \sum_p |\Psi_p\rangle \langle \Psi_p| \right) \hat{S} \left( \sum_r |\Psi_r\rangle \langle \Psi_r| \right) | \Psi_B \rangle \right| = \\ & = \left| \sum_p \sum_r \langle \Psi_A | \Psi_p \rangle \cdot \langle \Psi_p | \hat{S} | \Psi_r \rangle \cdot \langle \Psi_r | \Psi_B \rangle \right| = \\ & = \left| \sum_p \sum_r \langle \Psi_A | \Psi_p \rangle \cdot \langle \Psi_r | \Psi_B \rangle \cdot \langle \Psi_p | \hat{S} | \Psi_r \rangle \right| < 1. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Величины  $\langle \Psi_A | \Psi_p \rangle$ ,  $\langle \Psi_r | \Psi_B \rangle$  — это числа, и в силу принадлежности векторов  $|\Psi_p\rangle$ ,  $|\Psi_r\rangle$  к полному ортонормированному набору:

$$\sum_p \langle \Psi_A | \Psi_p \rangle = 1, \quad \sum_r \langle \Psi_r | \Psi_B \rangle = 1.$$

Следовательно, по крайней мере, ограничение сверху величин  $\langle \Psi_p | \hat{S} | \Psi_r \rangle$ , а еще надежнее — условие

$$|\langle \Psi_p | \hat{S} | \Psi_r \rangle| < 1$$

может привести к реализации неравенства (3.12).

Сразу же заметим, что имеет смысл сгруппировать векторы  $|\Psi_p\rangle$ ,  $|\Psi_r\rangle$  в пары, поскольку лишь для вполне определенных пар матричный элемент оператора  $\hat{S}$  отличен от нуля. Например, на векторах, определенных формулами (3.19) и (3.21), матричный элемент  $\hat{S}$  равен

$$\begin{aligned} & {}_{(3.19)} \langle \Psi_p(\vec{P}, \vec{P}_\Phi) | \hat{S} | \Psi_r(\vec{P}, \vec{P}_\Phi) \rangle_{(3.19)} + \\ & + {}_{(3.21)} \langle \Psi_p(\vec{P}, \vec{P}_\Phi) | \hat{S} | \Psi_r(\vec{P}, \vec{P}_\Phi) \rangle_{(3.21)} = \end{aligned}$$

$$= i \cdot D \cdot \sqrt{M} \cdot \left( \frac{1}{E(\vec{P}') - E(\vec{P}' - \vec{P}_\Phi) - E_\Phi} - \frac{1}{E(\vec{P}'') - E(\vec{P}'' + \vec{P}_\Phi) + E_\Phi} \right). \quad (3.26,а)$$

А теперь вспомним, что, как следует из результатов анализа сверхпроводящего состояния металла (гл. 2), необходимо считать взаимодействующие друг с другом электроны пребывающими только в спаренных состояниях.<sup>1)</sup> Поэтому положим  $\vec{P}' + \vec{P}'' = 0$ , после чего:

$$\langle \Psi_p(\vec{P}, \vec{P}_\Phi) | \hat{S} | \Psi_r(\vec{P}, \vec{P}_\Phi) \rangle = \frac{2i \cdot D \cdot E_\Phi \cdot \sqrt{M}}{[E(\vec{P}) - E(\vec{P} \pm \vec{P}_\Phi)]^2 - E_\Phi^2}. \quad (3.26,б)$$

Подставляя (3.26,б) в (3.25) и используя для  $D$  формулу (3.2), преобразуем условие (3.12) к виду:

$$\left\{ \sqrt{\frac{8}{9} \cdot \frac{\epsilon^2}{M_{ат} \cdot N_{ат} \cdot s^2}} \cdot \sum_p \sum_r \langle \Psi_A | \Psi_p(\vec{P}, \vec{P}_\Phi) \rangle \cdot \langle \Psi_r(\vec{P}, \vec{P}_\Phi) | \Psi_B \rangle \times \right. \\ \left. \times \left| \frac{E_\Phi^{3/2} \cdot \sqrt{M(E_\Phi)}}{[E(\vec{P}) - E(\vec{P} \pm \vec{P}_\Phi)]^2 - E_\Phi^2} \right| \right\} < 1. \quad (3.27)$$

Естественно, что для реализации такового неравенства необходимо “запретить” появление слишком малых знаменателей. В §3.4 мы обсудим ситуацию, складывающуюся в связи с подобным запретом.

### §3.2. Гамильтониан БКШ (Бардина, Купера, Шриффера)

#### 3.2.1. Ликвидация представления о взаимодействии через “посредника” и гамильтониан Фрелиха

Казалось бы, что после того, как найден гамильтониан  $\hat{H}$  в виде (3.13), можно рассчитать полную энергию системы электронов и фононов<sup>2)</sup>. Но для этого нужно установить вид векторов  $|\Psi\rangle$ . Сделать

1) В §4.2 будет доказано, что в коллективе связанных друг с другом частиц спаренные состояния заполнены одинаково (в отсутствие внешних возмущений и при  $T=0$ ).

2) Чтобы не отклоняться от темы, не будем сейчас обсуждать цель расчета полной энергии.

это можно, либо решая уравнение Шредингера (уже с оператором  $\hat{H}$ , а не  $\hat{H}_0$ )

$$\hat{H} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle$$

(если таковое существует) и находя сразу и  $|\Psi\rangle$ , и  $E$ , либо из каких-то самостоятельных соображений. В последнем случае вектор  $|\Psi\rangle$  может и не оказаться собственным вектором оператора  $\hat{H}$ . Поэтому будем заранее иметь в виду вычисление среднего значения полной энергии — величины

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle,$$

которая существует даже, если  $|\Psi\rangle$  не является собственным вектором оператора  $\hat{H}$ .

Прежде всего целесообразно — в соответствии с традиционным для квантовой теории приемом — испытать в качестве  $|\Psi\rangle$  каждый из собственных векторов оператора  $\hat{H}_0$ , рассматривая величину

$$\langle \Psi | \left( \frac{1}{2} [ [\hat{H}_1, \hat{S}] ] \right) | \Psi \rangle$$

как небольшое изменение “прежней” средней энергии  $\langle \Psi | \hat{H}_0 | \Psi \rangle$  системы свободных фононов и свободных электронов после “включения” взаимодействия между электронами.

Хотя создается впечатление, что никаких проблем с вектором  $|\Psi\rangle$  — собственным вектором оператора  $\hat{H}_0$  не возникает, необходимо обратить внимание еще на одно существенное обстоятельство.

Дело в том, что мы систематически упоминаем о поглощении и испускании фононов. А ведь при  $T = 0$  К фононов в кристалле, казалось бы, быть не может. Тем не менее взаимодействие электронов с ионами решетки бесспорно существует и при  $T = 0$  К<sup>1)</sup>. Выход из положения подсказывает представление о виртуальных фононах, суще-

1) Напомним, что взаимодействие электронов с ионами, которое мы сейчас имеем в виду, обусловлено раскачиванием электронами ионов — смещением их из положений равновесия. Система же раскачивающихся ионов эквивалентна системе фононов вне зависимости от того, какой именно агент ответствен за раскачивание: тепловые возбуждения со стороны термостата или собственные электроны.

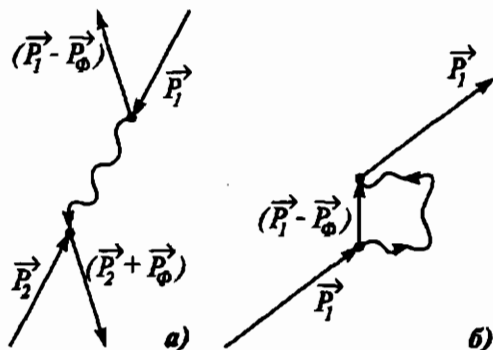


Рис. 3.2. Представление о виртуальных фононах:

а — два электрона обмениваются виртуальным фононом (представленным волнистой стрелкой); б — “одевание” электрона в фононную “шубу” (электрон поглощает тот фонон, который сам же испустил)

ствующих в “свободном полете” исчезающе малое время. Такое бывает, если:

а) электрон, обладавший импульсом  $\vec{P}_1$ , испускает фонон с импульсом  $\vec{P}_\phi$ , а электрон, обладавший импульсом  $\vec{P}_2$ , сразу же поглощает этот фонон (рис. 3.2, а);

б) электрон, обладающий импульсом  $\vec{P}_1$ , сначала испускает фонон с импульсом  $\vec{P}_\phi$ , переходя в состояние с импульсом  $(\vec{P}_1 - \vec{P}_\phi)$ , а потом поглощает фонон с импульсом  $\vec{P}_\phi$  и возвращается в состояние с импульсом  $\vec{P}_1$  (рис. 3.2, б).

Учитывая сказанное, мы используем для вычисления средней энергии системы фононов и взаимодействующих друг с другом электронов такой вектор  $|\Psi\rangle$ , который отвечает отсутствию лишь тепловых фононов. Поскольку этот вектор  $|\Psi\rangle$  остается собственным оператором  $\hat{H}_0$ , описывающего две не взаимодействующие друг с другом подсистемы, упомянутый вектор можно представить в виде “произведения” электронного вектора на фононный:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_{эл}\rangle |\Psi_\phi\rangle_0. \quad (3.28)$$

Здесь индекс “о” при  $|\Psi_\phi\rangle$  означает отсутствие тепловых фононов.



Вычислим среднее значение полной энергии, используя (3.3), (3.4), (3.13), (3.28):

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi_{\text{эл}} | {}_0 \langle \Psi_{\Phi} | \left( \hat{H}_0 + \frac{1}{2} [[\hat{H}_1, \hat{S}]] \right) | \Psi_{\Phi} \rangle_0 | \Psi_{\text{эл}} \rangle = \\
 & = {}_0 \langle \Psi_{\Phi} | \left\{ \langle \Psi_{\text{эл}} | \left( \sum_{\vec{P}} E(\vec{P}) \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} \right) | \Psi_{\text{эл}} \rangle \right\} | \Psi_{\Phi} \rangle_0 + \\
 & + \langle \Psi_{\text{эл}} | \left\{ {}_0 \langle \Psi_{\Phi} | \left( s \cdot \sum_{\vec{P}_{\Phi}} P_{\Phi} \cdot \left( a_{\vec{P}_{\Phi}}^+ a_{\vec{P}_{\Phi}} + \frac{1}{2} \right) \right) | \Psi_{\Phi} \rangle_0 \right\} | \Psi_{\text{эл}} \rangle + \\
 & + \langle \Psi_{\text{эл}} | \left\{ {}_0 \langle \Psi_{\Phi} | \frac{1}{2} [[\hat{H}_1, \hat{S}]] | \Psi_{\Phi} \rangle_0 \right\} | \Psi_{\text{эл}} \rangle. \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Так как величина  $\langle \Psi_{\text{эл}} | \left( \sum_{\vec{P}} E(\vec{P}) \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} \right) | \Psi_{\text{эл}} \rangle$  не является оператором (это “число” с размерностью энергии), то (учитывая ортонормированность векторов  $|\Psi_{\text{эл}}\rangle$  и  $|\Psi_{\Phi}\rangle_0$  порознь), получается, что:

$$\begin{aligned}
 & {}_0 \langle \Psi_{\Phi} | \left\{ \langle \Psi_{\text{эл}} | \left( \sum_{\vec{P}} E(\vec{P}) \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} \right) | \Psi_{\text{эл}} \rangle \right\} | \Psi_{\Phi} \rangle_0 = {}_0 \langle \Psi_{\Phi} | \Psi_{\Phi} \rangle_0 \times \\
 & \times \langle \Psi_{\text{эл}} | \left( \sum_{\vec{P}} E(\vec{P}) \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} \right) | \Psi_{\text{эл}} \rangle = \langle \Psi_{\text{эл}} | \left( \sum_{\vec{P}} E(\vec{P}) \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} \right) | \Psi_{\text{эл}} \rangle.
 \end{aligned}$$

Поскольку вектор  $|\Psi_{\Phi}\rangle_0$  описывает подсистему такую, что ни в одном из  $\vec{P}_{\Phi}$ -состояний нет ни одного теплового фона, то:

$${}_0 \langle \Psi_{\Phi} | \left( s \cdot \sum_{\vec{P}_{\Phi}} P_{\Phi} \cdot \left( a_{\vec{P}_{\Phi}}^+ a_{\vec{P}_{\Phi}} + \frac{1}{2} \right) \right) | \Psi_{\Phi} \rangle_0 = \frac{s}{2} \cdot \sum_{\vec{P}_{\Phi}} P_{\Phi} \equiv E_0.$$

Величина  $E_0$  — так называемая “энергия нулевых колебаний” ионов кристаллической решетки, и в дальнейшем расчет можно вести, положив  $E_0 = 0$ .

В результате правая часть (3.29) сводится к виду

$$\langle \Psi_{эл} | \left\{ \sum_{\vec{P}} E(\vec{P}) \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} + \frac{1}{2} {}_o\langle \Psi_{\Phi} | [[\hat{H}_1, \hat{S}] | \Psi_{\Phi}]_o \right\} | \Psi_{эл} \rangle. \quad (3.30)$$

Теперь займемся “слабым возмущением”:

$$\begin{aligned} & {}_o\langle \Psi_{\Phi} | [[\hat{H}_1, \hat{S}] | \Psi_{\Phi}]_o = \\ & = {}_o\langle \Psi_{\Phi} | \left[ \hat{H}_1 \sum_{\vec{P}'_{\Phi}} |\Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi})\rangle \langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi})| \hat{S} \right] | \Psi_{\Phi} \rangle_o - \\ & - {}_o\langle \Psi_{\Phi} | \left[ \hat{S} \sum_{\vec{P}'_{\Phi}} |\Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi})\rangle \langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi})| \hat{H}_1 \right] | \Psi_{\Phi} \rangle_o = \\ & = \sum_{\vec{P}'_{\Phi}} {}_o\langle \Psi_{\Phi} | \hat{H}_1 | \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) \rangle \cdot \langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) | \hat{S} | \Psi_{\Phi} \rangle_o - \\ & - \sum_{\vec{P}'_{\Phi}} {}_o\langle \Psi_{\Phi} | \hat{S} | \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) \rangle \cdot \langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) | \hat{H}_1 | \Psi_{\Phi} \rangle_o. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Здесь использован единичный оператор

$$\sum_{\vec{P}'_{\Phi}} |\Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi})\rangle \langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi})|,$$

построенный из векторов состояний только подсистемы свободных фононов. Вектор  $|\Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi})\rangle$  означает, что в состоянии с импульсом  $\vec{P}'_{\Phi}$  присутствует не менее одного свободного фоновина, но не теплового, а виртуального.

Вычислим для примера величину

$$\sum_{\vec{P}'_{\Phi}} {}_o\langle \Psi_{\Phi} | \hat{H}_1 | \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) \rangle \cdot \langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) | \hat{S} | \Psi_{\Phi} \rangle_o.$$

1 этап (используем выражение (3.24))

$$\begin{aligned} \hat{S}|\Psi_{\Phi}\rangle_0 &= i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_{\Phi}} D \cdot \frac{c_{\vec{P}-\vec{P}_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}} c_{\vec{P}_{\Phi}}^+}{E(\vec{P}) - E(\vec{P}-\vec{P}_{\Phi}) - E_{\Phi}} |\Psi_{\Phi}\rangle_0 - \\ &- i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_{\Phi}} D \cdot \frac{c_{\vec{P}+\vec{P}_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}} c_{\vec{P}_{\Phi}}^+}{E(\vec{P}) - E(\vec{P}+\vec{P}_{\Phi}) + E_{\Phi}} |\Psi_{\Phi}\rangle_0 = \\ &= i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_{\Phi}} D \cdot \frac{c_{\vec{P}-\vec{P}_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}}}{E(\vec{P}) - E(\vec{P}-\vec{P}_{\Phi}) - E_{\Phi}} |\Psi_{\Phi}(\vec{P}_{\Phi})\rangle - 0. \end{aligned}$$

Заметим, что вектор  $|\Psi_{\Phi}(\vec{P}_{\Phi})\rangle$  отвечает случаю, когда только в состоянии с импульсом  $\vec{P}_{\Phi}$  присутствует фотон, и этот фотон — один<sup>1)</sup>.

2 этап

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}_{\Phi}') | (\hat{S} |\Psi_{\Phi}\rangle_0) = \\ &= i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_{\Phi}} D \cdot \frac{c_{\vec{P}-\vec{P}_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}}}{E(\vec{P}) - E(\vec{P}-\vec{P}_{\Phi}) - E_{\Phi}} \cdot \langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}_{\Phi}') | \Psi_{\Phi}(\vec{P}_{\Phi}) \rangle = \\ &= i \cdot \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_{\Phi}'} D \cdot \frac{c_{\vec{P}-\vec{P}_{\Phi}'}^+ c_{\vec{P}}}{E(\vec{P}) - E(\vec{P}-\vec{P}_{\Phi}') - E_{\Phi}'}, \end{aligned}$$

так как

$$\langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}_{\Phi}') | \Psi_{\Phi}(\vec{P}_{\Phi}) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } \vec{P}_{\Phi} = \vec{P}_{\Phi}', \\ 0 & \text{при } \vec{P}_{\Phi} \neq \vec{P}_{\Phi}'. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Этот возникший фотон оказывается виртуальным. На этапе вычисления величины  $\langle \Psi_{\Phi} | \hat{H}_1 | \Psi_{\Phi}(\vec{P}_{\Phi}') \rangle$  мы убедимся, что возникший фотон исчезает.

3 этап

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{P}'_{\Phi}} \langle \Psi_{\Phi} | \hat{H}_1 | \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) \rangle \cdot \langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) | \hat{S} | \Psi_{\Phi} \rangle_0 = \\ & = \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}'_{\Phi}} \left( -iD \cdot \frac{c_{\vec{P}'+\vec{P}'_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}}}{\vec{P}} \right) \left( iD \cdot \frac{c_{\vec{P}-\vec{P}'_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}}}{E(\vec{P}) - E(\vec{P}-\vec{P}'_{\Phi}) - E_{\Phi'}} \right) = \\ & = \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}'_{\Phi}} D^2 \cdot \frac{c_{\vec{P}'+\vec{P}'_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}} c_{\vec{P}-\vec{P}'_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}}}{E(\vec{P}) - E(\vec{P}-\vec{P}'_{\Phi}) - E_{\Phi'}} \quad 1). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Точно таким же способом находим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{P}'_{\Phi}} \langle \Psi_{\Phi} | \hat{S} | \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) \rangle \cdot \langle \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) | \hat{H}_1 | \Psi_{\Phi} \rangle_0 = \\ & = \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}'_{\Phi}} D^2 \cdot \frac{c_{\vec{P}'+\vec{P}'_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}} c_{\vec{P}-\vec{P}'_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}}}{E(\vec{P}) - E(\vec{P}+\vec{P}'_{\Phi}) + E_{\Phi'}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Переставим местами в этом выражении суммы по  $\vec{P}$  и  $\vec{P}'$ , соответственно заменив в числителе и знаменателе дроби все  $\vec{P}$  на  $\vec{P}'$ , а все  $\vec{P}'$  на  $\vec{P}$ . Правая часть выражения (3.33) приобретает вид

$$\sum_{\vec{P}'} \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}'_{\Phi}} D^2 \cdot \frac{c_{\vec{P}'+\vec{P}'_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}'} c_{\vec{P}-\vec{P}'_{\Phi}}^+ c_{\vec{P}'}}{E(\vec{P}') - E(\vec{P}'+\vec{P}'_{\Phi}) + E_{\Phi'}}.$$

1) Сумма по  $\vec{P}'$  введена, поскольку те операторы  $c_r^+$  и  $c_r$ , которые присутствуют в  $\hat{H}_1$ , не обязаны быть гождественными тем, которые присутствуют в  $\hat{S}$ .

Пользуясь случаем, заметим, что, совершая операцию  $\hat{H}_1 | \Psi_{\Phi}(\vec{P}'_{\Phi}) \rangle$ , мы уничтожаем фонон, возникший на  $i$  этапе.

Поскольку правая часть (3.31) есть разность правых частей (3.32) и (3.33), получаем, наконец, что

$$\begin{aligned} {}_0\langle \Psi_\Phi | [ [\hat{H}_1, \hat{S}] | \Psi_\Phi \rangle_0 = \sum_{\vec{P}'} \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_\Phi} D^2 \cdot \left( \frac{1}{E(\vec{P}) - E(\vec{P} - \vec{P}_\Phi) - E_\Phi} - \right. \\ \left. - \frac{1}{E(\vec{P}') - E(\vec{P}' + \vec{P}_\Phi) + E_\Phi} \right) \cdot c_{\vec{P}'+\vec{P}_\Phi}^+ c_{\vec{P}'} c_{\vec{P}-\vec{P}_\Phi}^+ c_{\vec{P}} \quad (3.34) \end{aligned}$$

Здесь опущен ставший ненужным штрих у импульса фонона  $\vec{P}_\Phi$ .

Принимая во внимание (3.30) и (3.34), приведем (3.29) к виду:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{эл} | \{ {}_0\langle \Psi_\Phi | \hat{H} | \Psi_\Phi \rangle_0 \} | \Psi_{эл} \rangle = \langle \Psi_{эл} | \left\{ \sum_{\vec{P}} E(\vec{P}) \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\vec{P}'} \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_\Phi} D^2 \cdot \left( \frac{1}{E(\vec{P}) - E(\vec{P} - \vec{P}_\Phi) - E_\Phi} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{E(\vec{P}') - E(\vec{P}' + \vec{P}_\Phi) + E_\Phi} \right) \cdot c_{\vec{P}'+\vec{P}_\Phi}^+ c_{\vec{P}'} c_{\vec{P}-\vec{P}_\Phi}^+ c_{\vec{P}} \right\} | \Psi_{эл} \rangle. \quad (3.35) \end{aligned}$$

Бросается в глаза, что гамильтониан, находящийся внутри фигурных скобок правой части (3.35), не содержит операторов испускания и поглощения фононов<sup>1)</sup>. То есть, выглядит так, как если бы существовало прямое (без “посредника”) межэлектронное взаимодействие. Назовем гамильтониан

$$\begin{aligned} \hat{H} = \sum_{\vec{P}} E_{\vec{P}} \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\vec{P}'} \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_\Phi} D^2 \cdot \left( \frac{1}{E(\vec{P}) - E(\vec{P} - \vec{P}_\Phi) - E_\Phi} - \right. \end{aligned}$$

1) Как и должно быть, если мы запрещаем существование свободных фононов в стационарном состоянии всей системы.

$$-\frac{1}{E(\vec{P}') - E(\vec{P}' + \vec{P}'_{\Phi}) + E_{\Phi}} \left. \begin{array}{l} c^+_{\vec{P}' + \vec{P}'_{\Phi}} c_{\vec{P}'} c^+_{\vec{P}' - \vec{P}'_{\Phi}} c_{\vec{P}'} \end{array} \right\} \quad (3.36)$$

гамильтонианом коллектива электронов, взаимодействующих друг с другом. Впервые гамильтониан (3.36) был получен Фрелихом в 1952 г.

### 3.2.2. Пример

Сначала допустим, что во взаимодействии могут участвовать только такие электроны, абсолютные значения импульсов которых заключены в достаточно узком (“толщиной”  $\Delta P$ ) сферическом слое  $\vec{P}$ -пространства, опоясывающем поверхность радиуса  $P_F$  (рис. 3.3). Затем введем ограничивающее условие: импульсы взаимодействующих электронов должны удовлетворять равенству

$$\vec{P}' + \vec{P} = \vec{P}. \quad (3.37)$$

Для определенности направим вектор  $\vec{P}$  так, как показано на рис. 3.3. Тогда лишь внутри очень небольшой части упомянутого выше слоя (две заштрихованные области на рис. 3.3) могут происходить электронные переходы (с участием виртуальных фононов). Тем самым во втором слагаемом (3.36) придется ограничить области суммирования и по  $\vec{P}'$ , и по  $\vec{P}$ , и по  $\vec{P}'_{\Phi}$ .

Другими словами, придется изъять из сумм по всему  $\vec{P}'$  (равно, как по всему  $\vec{P}$ )-пространству все те слагаемые, присутствие которых не согласуется с условием (3.37). Очевидно, что если положить  $\mathcal{P} = 0$ , количество изъятых слагаемых будет наименьшим. Подчеркнем, что введенное в §2.8 предположение о том, что в незатухающем (сверхпроводящем) токе участвуют электроны, находящиеся именно в спаренном состоянии, как раз соответствует условию  $\vec{P} = 0$  в отсутствие тока.

### 3.2.3. Гамильтониан БКШ (окончательный вид)

Если сохранить допущение, что лишь электроны “узкого пояса” в  $\vec{P}$ -пространстве участвуют во взаимодействии, и добавить условие спаривания в отсутствие тока

$$\vec{P}' + \vec{P} = 0, \quad (3.38)$$

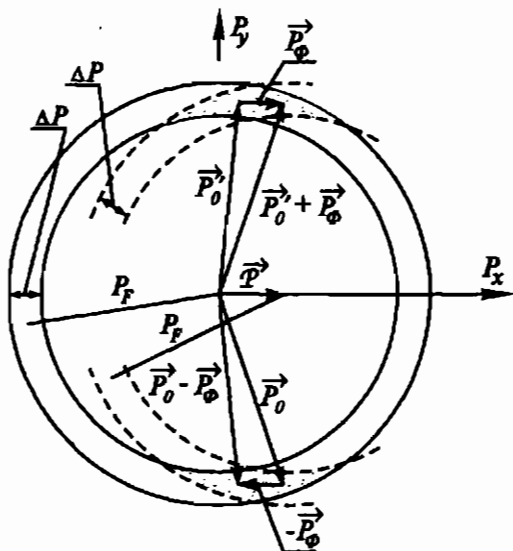


Рис. 3.3. Электронные состояния в  $\vec{P}$ -пространстве и переходы электронов между ними.  $\vec{P}_\Phi$  и  $-\vec{P}_\Phi$  — векторы, на которые изменились первоначальные импульсы электронов  $\vec{P}_0'$  и  $\vec{P}_0$ . Импульсы всех взаимодействующих электронов таковы, что  $\vec{P}' + \vec{P} = \vec{P}$

то

$$\vec{P}' + \vec{P}_\Phi = -(\vec{P} - \vec{P}_\Phi),$$

и гамильтониан (3.36) преобразуется к виду

$$\hat{H} = \sum_{\vec{P}} E_{\vec{P}} \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_\Phi} \frac{2 D^2 \cdot E_\Phi}{(E(\vec{P}) - E(\vec{P} - \vec{P}_\Phi))^2 - E_\Phi^2} \cdot c_{(\vec{P} - \vec{P}_\Phi)}^+ c_{(\vec{P} - \vec{P}_\Phi)} - c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}}, \quad (3.39)$$

где учтено, что при условии (3.38) имеем:

$$E(\vec{P}) = E(-\vec{P}); \quad E(\vec{P} - \vec{P}_\Phi) = E(\vec{P}_\Phi - \vec{P}).$$

Чтобы упростить выражение (3.39), введем обозначения

$$\vec{P} - \vec{P}_\Phi \equiv \vec{P}', \quad E_\Phi \equiv s \cdot |\vec{P} - \vec{P}'|$$

и подставим в качестве величины  $D$  соотношение (3.2). Тогда

$$\begin{aligned} \hat{H} = & 2 \cdot \sum_{\substack{\vec{P} \\ P_y \geq 0}} E(\vec{P}') \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} + \sum_{\substack{\vec{P}' \\ P_y' \geq 0 \\ \vec{P} \neq \vec{P}'}} \sum_{\substack{\vec{P} \\ P_y \geq 0}} 2 \varepsilon^2 \cdot (9 M_{\text{ат}} \cdot N_{\text{ат}} \cdot s^2)^{-1} \times \\ & \times \frac{2 E_\Phi^2}{[E(\vec{P}) - E(\vec{P}')]^2 - E_\Phi^2} \cdot c_{\vec{P}'}^+ c_{-\vec{P}'} c_{-\vec{P}} c_{\vec{P}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

В этом выражении отражено с помощью соотношения  $P_y \geq 0$ , что суммирование по векторам  $\vec{P}'$  и  $\vec{P}$  распространяется только на полупространство импульсов. Действительно, исчезновение двух электронов из состояний  $-\vec{P}$  и  $\vec{P}$  (этому событию отвечает произведение операторов  $c_{-\vec{P}} c_{\vec{P}}$ ) тождественно исчезновению их из

состояний  $\vec{P}$  и  $-\vec{P}$  (а этому событию отвечает произведение  $c_{\vec{P}} c_{-\vec{P}}$ ). Аналогичное замечание относится к возникновению двух

электронов в состояниях  $\vec{P}$  и  $-\vec{P}$ . Таким образом (в точном соответствии с математической схемой квантовой теории),

$$c_{\vec{P}'}^+ c_{-\vec{P}'} c_{-\vec{P}} c_{\vec{P}} \equiv c_{-\vec{P}'}^+ c_{\vec{P}'} c_{\vec{P}} c_{-\vec{P}}.$$

При записи первого слагаемого в правой части (3.40) использовано равенство  $E(\vec{P}) = E(-\vec{P})$ , из-за чего

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\vec{P} \\ P_y \geq 0}} E(\vec{P}') \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} + \sum_{\substack{\vec{P} \\ P_y \leq 0}} E(-\vec{P}') \cdot c_{-\vec{P}}^+ c_{-\vec{P}} = \\ & = 2 \sum_{\substack{\vec{P} \\ P_y \geq 0}} E(\vec{P}') \cdot c_{\vec{P}}^+ c_{\vec{P}} = 2 \sum_{\substack{\vec{P} \\ P_y \leq 0}} E(-\vec{P}') \cdot c_{-\vec{P}}^+ c_{-\vec{P}}. \end{aligned}$$



Подчеркнем, что вполне возможен переход электрона из состояния  $\vec{P}$  в  $\vec{P}'$ , при котором  $|\vec{P}| = |\vec{P}'|$ . Но, разумеется, если это происходит с участием виртуального фонона, то не могут совпадать еще и на-

правления векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{P}'$ . Поэтому под знаком  $\sum_{\vec{P}'} \sum_{\vec{P}}$  в (3.40) от-

мечено, что  $\vec{P} \neq \vec{P}'$ . То есть, назначив  $\vec{P}'$ , необходимо исключить из суммы  $\sum_{\vec{P}}$  слагаемое

$$-\frac{2\varepsilon^2}{9M_{\text{ат}} \cdot N_{\text{ат}} \cdot s^2} \cdot c_{\vec{P}'}^+ \cdot c_{-\vec{P}'}^+ \cdot c_{-\vec{P}} \cdot c_{\vec{P}}.$$

Используя обозначение

$$4\varepsilon^2 \cdot \left\{ (9M_{\text{ат}} \cdot N_{\text{ат}} \cdot s^2) \cdot \left( -1 + \frac{(E(\vec{P}) - E(\vec{P}'))^2}{E_{\Phi}^2} \right) \right\}^{-1} = U_{\vec{P}'\vec{P}}, \quad (3.41)$$

а также простую связь между импульсом и скоростью электрона

$$m \cdot \vec{V} = \vec{P},$$

и различая все скорости с помощью индексов  $i, j$ , перепишем выражение (3.40):

$$\hat{H} = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}} E_i c_i^+ c_i + \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}} U_{ij} c_i^+ c_{-i}^+ c_{-j} c_j. \quad (3.42)$$

Гамильтониан (3.42) значит тем, что именно в такой форме он был записан в пионерской работе Бардина, Купера, Шриффера.

### §3.3. Матричный элемент взаимодействия

Вернемся к формуле (3.41). Напомним, что в п. 1.5.4 было обобщено предположение о существовании между сверхпроводящими электронами притяжения. Последнему отвечает, как известно, отрицательная потенциальная энергия. Из (3.41) видно, что знак величи-

ны  $U_{\vec{p}, \vec{p}'}$  (а в новых обозначениях — величины  $U_{ij}$ ) зависит от знака дроби

$$\frac{1}{-1 + \left( \frac{E(\vec{P}) - E(\vec{P}')}{E_{\Phi}} \right)^2} \equiv g. \quad (3.43)$$

Здесь

$$E(\vec{P}) - E(\vec{P}') = \frac{(P^2 - P'^2)}{2m} = \frac{m}{2} \cdot (V^2 - V'^2) - \quad (3.44)$$

разность энергий электрона до и после перехода с участием фонона, а

$$E_{\Phi} = s \cdot |\vec{P} - \vec{P}'| = s \cdot m \cdot |\vec{V} - \vec{V}'| - \quad (3.45)$$

энергия фонона<sup>1)</sup>. Подчеркнем, однако, что энергия фонона ограничена сверху величиной  $\hbar \omega_D$ , где  $\omega_D$  ( $\approx 10^{13}$  Гц) — дебаевская частота. С учетом (3.44), (3.45) перепишем выражение (3.43):

$$g = \left[ -1 + \left( \frac{p^2 - p'^2}{2m \cdot s \cdot P_{\Phi}} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Здесь

$$\vec{P}_{\Phi} = \vec{P} - \vec{P}' = m \cdot (\vec{V} - \vec{V}'),$$

однако напомним, что

$$0 \leq P_{\Phi} \leq \frac{\hbar \omega_D}{s}.$$

График зависимости  $g$  от  $(P^2 - P'^2)$  ( $P_{\Phi}$  играет роль параметра) представлен на рис. 3.4. Подчеркнем, что речь идет о  $\vec{P}$ -пространстве (например, о той части, что расположена вне Ферми-сферы).

1) Модуль  $|\vec{V} - \vec{V}'|$  призван напомнить, что импульс и скорость фонона всегда совпадают по направлению.

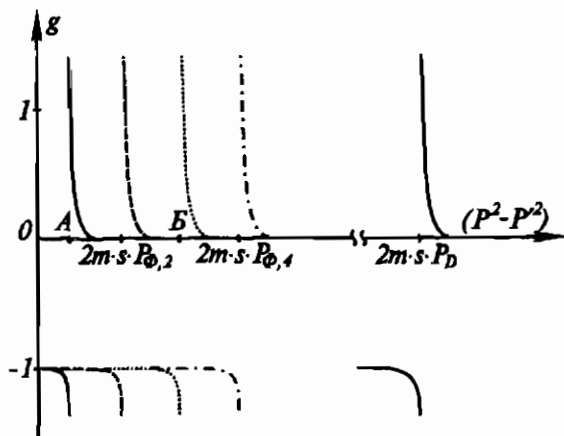


Рис. 3.4.  $g$  — функция. Значения аргумента в точках А и В равны  $2m \cdot s \cdot P_{\Phi,1}$  и  $2m \cdot s \cdot P_{\Phi,3}$  соответственно

Допустим, что можно назначать для участия во взаимодействии импульсы как фононов, так и электронов. Из рис. 3.4 сразу следует, что для любого назначенного  $P_{\Phi} > 0$  нужно потребовать, чтобы происходили в высшей степени упругие электронные переходы, то есть выделить для взаимодействия очень узкий сферический слой в  $\vec{P}$ -полупространстве<sup>1)</sup>. Тогда для всех, входящих в этот слой импульсов  $\vec{P}$  и  $\vec{P}'$ , функция  $g < 0$ . Однако число состояний в слое исчезающе малой толщины  $dp$  равно

$$v \cdot \frac{p^2}{\pi^2 \cdot \hbar^3} \cdot dp$$

(здесь  $v$  — объем образца), то есть исчезающе мало. Поэтому разумно ограничиться условием

$$p^2 - p'^2 < 2m \cdot s \cdot P_{\Phi, \text{макс}} = 2m \cdot \hbar \omega_D. \quad (3.46)$$

1) При изменении  $\vec{P}$  внутри очень узкого слоя модуль  $|\vec{P}'|$  меняется очень слабо.

Учитывая, что функция  $g$  меняется от  $-1$  до  $-\infty$  в очень узком интервале величин  $(P^2 - P'^2)$ , значение разности  $2m \cdot s \cdot P_\Phi - (P^2 - P'^2)$  можно взять достаточно малым, например

$$2m \cdot s \cdot P_\Phi - (P^2 - P'^2) = 0,2 \cdot 2m \cdot s \cdot P_\Phi \quad 1). \quad (3.47)$$

Условия (3.46), (3.47) гарантируют для назначенной величины  $P_\Phi$  притяжение между всеми теми электронами, импульсы которых входят в соответствующий слой  $\vec{P}$ -полупространства. С учетом сказанного в §2.8, этот слой уже во всем  $\vec{P}$ -пространстве должен быть заключен в пределах от

$$\sqrt{2m \cdot (F - \hbar \omega_D)} \quad \text{до} \quad \sqrt{2m \cdot (F + \hbar \omega_D)}.$$

При этом  $(P^2 - P'^2) = 4m \cdot \hbar \omega_D$ . Как было показано в §2.8, такой толщины более чем достаточно (хотя и нельзя сказать, что очень много). Поэтому можно позволить себе принять толщину слоя около  $F$ , например, на 20% меньше, чем  $2\hbar \omega_D$ . Этого хватит, чтобы считать величину  $U_{\vec{P}' \vec{P}}$  только отрицательной для всех  $\vec{P}'$  и  $\vec{P}$ , находящихся внутри упомянутого слоя. Кроме того, с достаточной для оценок степенью точности величина  $U_{\vec{P}' \vec{P}}$  оказывается в этом случае еще и не зависящей ни от  $\vec{P}'$ , ни от  $\vec{P}$ :

$$U_{\vec{P}' \vec{P}} = - \frac{4 \epsilon^2}{9 M_{\text{ат}} \cdot N_{\text{ат}} \cdot s^2}. \quad (3.48)$$

Конечно, в последующих расчетах мы будем пренебрегать отмеченным 20% сужением слоя взаимодействующих электронов.

1) При этом  $-3 \leq g \leq -1$ .

### §3.4. Оценка справедливости преобразования гамильтониана

Сначала подчеркнем: мы фактически просто постулировали, что в качестве виртуальных фононов, обеспечивающих межэлектронное притяжение, выступают только дебаевские. Покажем теперь, что этот же постулат является единственным оправданием введенного в п. 3.1.2 критерия (3.12). Как было сказано в конце §3.1, этот критерий — а с ним и возможность довести гамильтониан до формы (3.42) — реализуемы, если величина

$$\sqrt{\frac{8}{9} \cdot \frac{\epsilon^2}{M_{\text{ат}} \cdot N_{\text{ат}} \cdot s^2}} \cdot \left| \frac{2 E_{\Phi}^{3/2}}{\left( E(\vec{P}) - E(\vec{P}') \right)^2 - E_{\Phi}^2} \right| \quad 1) \quad (3.49)$$

окажется по крайней мере ограниченной (лучше всего, меньше единицы). Чтобы добиться этого для всех интересующих нас  $\vec{P}'$  и  $\vec{P}$ , необходимо исключить появление слишком малых знаменателей в

1) Нас не должно вводить в соблазн стоящее в знаменателе число атомов  $N_{\text{ат}}$ , которое для неограниченно протяженного образца столь же неограниченно велико. Дело в том, что величина (3.49) является множителем, фигурирующим в выражении (3.27), которое с учетом (3.28) может быть представлено в виде:

$$\left| \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{P}_{\Phi}} \langle \Psi_A | \Psi(\vec{P}) \rangle \cdot \left[ \frac{\sqrt{\frac{8}{9} \cdot \frac{\epsilon^2}{M_{\text{ат}} \cdot s^2}} \cdot E_{\Phi}^{3/2}}{\left( E(\vec{P}) - E(\vec{P} - \vec{P}_{\Phi}) \right)^2 - E_{\Phi}^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N_{\text{ат}}}} \right] \cdot \langle \Psi(\vec{P} + \vec{P}_{\Phi}) | \Psi_B \rangle \right| < 1.$$

Для неограниченно протяженного образца:

$$\left( \sum_{\vec{P}} \dots \right) \sim \sqrt{N_{\text{ат}}}; \quad \left( \sum_{\vec{P}_{\Phi}} \dots \right) \sim \sqrt{N_{\text{ат}}}.$$

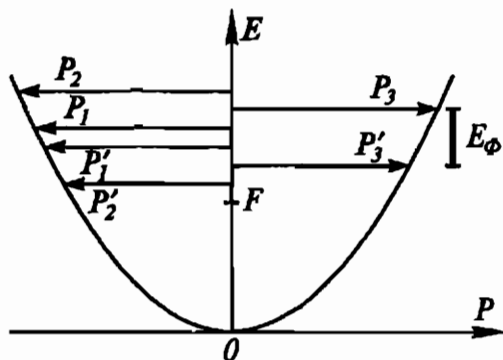


Рис. 3.5. К возникновению опасно малых знаменателей. Отрезок  $E_\Phi$  символизирует заданную энергию фонона. Показаны три примера переходов:

$$\begin{aligned} E(P_1) - E(P'_1) &< E_\Phi; \\ E(P_2) - E(P'_2) &> E_\Phi; \\ E(P_3) - E(P'_3) &= E_\Phi \end{aligned}$$

(3.49). А поскольку при этом еще требуется следить за выполнением неравенства

$$\left( E(\vec{P}) - E(\vec{P}') \right)^2 < E_\Phi^2$$

(иначе не возникнет притяжение), ясно, что наилучший знаменатель — это одна лишь величина  $(-E_\Phi^2)$ .

Однако, если привлечь к участию во взаимодействии только ту область  $\vec{P}$ -пространства, которая находится в слое толщиной  $\frac{P_F \cdot \hbar \cdot \omega_D}{F}$  около  $P_F$ , то ни в коем случае нельзя допускать, чтобы в качестве  $E_\Phi$  фигурировала величина, меньшая  $\hbar \cdot \omega_D$ . Дело в том, что, как следует из рис. 3.5, если  $E_\Phi < \hbar \cdot \omega_D$ , можно набрать внутри упомянутого слоя сколько угодно комбинаций из  $\vec{P}'$  и  $\vec{P}$ , удовлетворяющих самому опасному соотношению

$$\frac{P^2 - P'^2}{2m} = |\vec{P} - \vec{P}'| \cdot s = E_\Phi.$$

## Глава 4. ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЯ КОЛЛЕКТИВА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

### §4.1. Предварительные замечания

В главе 2 было показано, что поведение одной (отдельно взятой) частицы, участвующей в таком взаимодействии, которое приводит к изменению ее скорости во времени, можно описать с помощью понятия “стационарная (или квазистационарная) степень заполнения  $\vec{V}$ -состояния”.

Признаком участия частицы во взаимодействии служит неравенство

$$0 < \tilde{N}(\vec{V}_i) < 1, \quad (4.1, a)$$

которое должно иметь место в некоторой области  $\vec{V}$ -пространства (по крайней мере — для одного состояния) или же во всем бесконечно протяженном  $\vec{V}$ -пространстве<sup>1)</sup>.

Разумеется, если частица всего одна, то взаимодействовать она может лишь с некоторым силовым полем, которое мы будем в дальнейшем именовать “телом взаимодействия”. Однако, если речь заходит о множестве частиц, возникает проблема, сущность которой можно выяснить на примере уже двухчастичного коллектива.

Прежде всего заметим, что в этом случае физической содержательностью обладает не только величина  $\tilde{N}(\vec{V}_i)$  (для любого  $i$ ), но и величина  $\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j)$  — стационарная степень заполнения сразу двух  $\vec{V}$ -состояний двумя частицами:

$$\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \tilde{n}(\vec{V}_i, \vec{V}_j, t) dt \right\},$$

---

<sup>1)</sup> Бесконечно протяженным  $\vec{V}$ -пространство можно считать, оставаясь в рамках нерелятивистского приближения.

где  $\tilde{n}$  — мгновенная степень заполнения, причем  $i \neq j$ , а

$$\tilde{n}(\vec{V}_i, \vec{V}_j, t) = \begin{cases} 1, & \text{если в момент } t \text{ в обоих состояниях} \\ & \text{присутствует по одной частице;} \\ 0, & \text{если это не так.} \end{cases}$$

Если имеет место ситуация, в которой каждая из частиц взаимодействует только с ранее упомянутым “телом”, но при этом частицы не взаимодействуют друг с другом, одновременное заполнение или незаполнение двух (разных) состояний может стать результатом только случайного стечения обстоятельств.

Если же обе частицы взаимодействуют еще и друг с другом или только друг с другом, то присутствие одной из них в определенном  $\vec{V}$ -состоянии (например, в  $i$ -м) обязательно сопровождается присутствием другой частицы также в определенном  $\vec{V}$ -состоянии (например, в  $j$ -м)<sup>1)</sup>. В дальнейшем нас не будет интересовать тот бесспорный факт, что взаимодействующие друг с другом частицы могут принимать участие еще и во взаимодействии порознь (независимо друг от друга) с неким “телом”. Поэтому мы будем различать только два типа взаимодействий: частиц друг с другом и каждой в отдельности с упомянутым “телом”.

Естественно, что, не участвуя в дрейфе, две взаимодействующие друг с другом частицы могут занимать лишь состояния с такими скоростями, которые удовлетворяют равенству

$$\vec{V}_i + \vec{V}_j = 0,$$

а, участвуя в дрейфе с неизменной во времени скоростью  $\vec{V}_{др}$ , — лишь состояния со скоростями, удовлетворяющими равенству

$$\vec{V}_i + \vec{V}_j = 2 \vec{V}_{др}. \quad 2)$$

Таким образом для двух частиц, взаимодействующих друг с другом:

1) Иными словами, взаимодействие двух объектов именно друг с другом приводит к тому, что одно событие имеет место только в сопровождении другого. Тогда вероятность того, что произойдет одно событие, не может не быть тождественно равной вероятности того, что произойдет другое, а вероятность того, что произойдут сразу оба события, не может не быть равной вероятности любого из них.

2) См. §2.8.



а) в отсутствие дрейфа

$$\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j) = \begin{cases} \tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_j), & \text{если } \vec{V}_i + \vec{V}_j = 0; \\ 0, & \text{если } \vec{V}_i + \vec{V}_j \neq 0; \end{cases} \quad (4.1,б)$$

(4.1,в)

б) при участии каждой частицы в дрейфе со скоростью  $\vec{V}_{др}$

$$\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j) = \begin{cases} \tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_j), & \text{если } \vec{V}_i + \vec{V}_j = 2\vec{V}_{др}; \\ 0, & \text{если } \vec{V}_i + \vec{V}_j \neq 2\vec{V}_{др}. \end{cases}$$

Для частиц, пусть участвующих во взаимодействии, но — не друг с другом:

$$\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j) = \tilde{N}(\vec{V}_i) \cdot \tilde{N}(\vec{V}_j)$$

при любых соотношениях между  $\vec{V}_i$  и  $\vec{V}_j$  как в отсутствие дрейфа, так и при участии в нем.

Теперь рассмотрим четырехчастичный коллектив. В этом случае физической содержательностью обладают уже три величины:

$$\tilde{N}(\vec{V}_i), \quad \tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j), \quad \tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j, \vec{V}_k, \vec{V}_l). \quad 2)$$

Допустим, что все четыре — притом тождественные — частицы взаимодействуют друг с другом (соотношения (4.1,а,б,в) при этом остаются в силе). Как следует из §2.8, для реализации сверхпроводимости это необходимо, но этого и достаточно. Тем не менее и для величины  $\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j, \vec{V}_k, \vec{V}_l)$  не может не существовать каких-то соотношений. Не будут ли они противоречить соотношениям (4.1,б,в)?

В принципе можно предположить, что при неучастии четверки взаимодействующих друг с другом частиц в дрейфе<sup>3)</sup> имеют место четыре типа соотношений.

$$1. \quad \begin{aligned} \tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j, \vec{V}_k, \vec{V}_l) &= \tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_j) = \\ &= \tilde{N}(\vec{V}_k) = \tilde{N}(\vec{V}_l), \quad \text{если } \vec{V}_i + \vec{V}_j + \vec{V}_k + \vec{V}_l = 0. \end{aligned} \quad (4.2,а)$$

1) Напомним, что два состояния с такими скоростями называются одним спаренным состоянием (*i*-м или *j*-м).

2) Ради экономии времени читателя не будем рассматривать ни случай трех частиц, ни величины  $\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j, \vec{V}_k)$  и т.п. в случае четырехчастичного коллектива, как не имеющие отношения к сверхпроводимости.

3) Этот случай выбран в качестве более простого примера.

Сразу же заметим, что если ни одна из шести пар векторов не равна в сумме нулю, то равенство (4.2,а) противоречит равенству (4.1,б), согласно которому  $\tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_j)$  только при условии  $\vec{V}_i + \vec{V}_j = 0$  и т.п.

Однако, “к счастью”, равенство  $\tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_j)$  при совершенно произвольном соотношении между обеими скоростями, но при сохранении условия (4.1,а), абсолютно не соответствует физической реальности. В противном случае оно означало бы независимость  $\tilde{N}$  ни от направления, ни от модуля скорости несмотря на условие  $0 < \tilde{N}(\vec{V}) < 1$ .

Если же хотя бы одна из шести пар векторов равна в сумме нулю, то вся четверка векторов распадается на две пары такие, что

$$\vec{V}_i + \vec{V}_j = 0, \quad \vec{V}_k + \vec{V}_l = 0,$$

хотя  $\vec{V}_i + \vec{V}_k \neq 0, \vec{V}_i + \vec{V}_l \neq 0, \vec{V}_j + \vec{V}_k \neq 0, \vec{V}_j + \vec{V}_l \neq 0$ .

В этом случае не может иметь места сквозное равенство (4.2,а), ибо:  $\tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_j); \tilde{N}(\vec{V}_k) = \tilde{N}(\vec{V}_l)$ ; но, как было сказано, не соответствуют реальности равенства

$$\tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_k); \tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_l); \tilde{N}(\vec{V}_j) = \tilde{N}(\vec{V}_k); \tilde{N}(\vec{V}_j) = \tilde{N}(\vec{V}_l).$$

Итак, предположительное соотношение (4.2,а), противоречащее (4.1,б), неприемлемо, поскольку совместно с обязательным условием (4.1,а) противоречит также и реальной действительности.

2. Обратимся к следующему соотношению

$$\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j, \vec{V}_k, \vec{V}_l) = 0, \quad \text{если } \vec{V}_i + \vec{V}_j + \vec{V}_k + \vec{V}_l \neq 0. \quad (4.2,б)$$

Если при этом ни одна из шести пар векторов не равна в сумме нулю, то равенство (4.2,б) полностью эквивалентно равенству (4.1,а).

Оба они отображают тот факт, что два взаимодействующие друг с другом частицы не могут (в бездрейфовом случае) находиться не в спаренном состоянии.

Если же допустить, что одна пара векторов в сумме равна нулю, то из (4.2,б) следует, что не равна нулю другая пара, а тогда, согласно также и соотношению (4.1,в), не могут две взаимодействующие частицы оказаться в  $\vec{V}$ -состояниях, не образующих спаренное (в бездрейфовом случае).

Таким образом, предположительное соотношение (4.2,б) можно считать эквивалентным соотношению (4.1,в), распространенному на случай двух пар частиц.

3. Теперь рассмотрим третье соотношение:

$$\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j, \vec{V}_k, \vec{V}_l) = \tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j) = \tilde{N}(\vec{V}_k, \vec{V}_l) \quad (4.2,в)$$

при условии, что

$$\vec{V}_i + \vec{V}_j = \vec{V}_k + \vec{V}_l = 0 \quad (\text{в бездрейфовом случае}), \text{ но } \vec{V}_i + \vec{V}_k \neq 0 \text{ и т.п.}$$

Ясно, что это соотношение неприемлемо, как противоречащее физической реальности, ибо, согласно (4.1,б),

$$\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j) = \tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_j); \quad \tilde{N}(\vec{V}_k, \vec{V}_l) = \tilde{N}(\vec{V}_k) = \tilde{N}(\vec{V}_l),$$

а тогда из соотношения (4.2,а) будет следовать, что

$$\tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_k), \quad \tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(\vec{V}_l) \quad \text{и т.п.,}$$

несмотря на произвольное соотношение между  $\vec{V}_i$  и  $\vec{V}_k$  т.п.

4. Наконец, четвертое соотношение:

$$\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j, \vec{V}_k, \vec{V}_l) = \tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j) \cdot \tilde{N}(\vec{V}_k, \vec{V}_l) \quad (4.2,г)$$

при условии, что

$$\vec{V}_i + \vec{V}_j = \vec{V}_k + \vec{V}_l = 0 \quad (\text{в бездрейфовом случае}), \text{ но } \vec{V}_i + \vec{V}_k \neq 0 \text{ и т.п.}$$

Это соотношение не только не противоречит ни одному из (4.1), но иным оно не может быть. Разумеется, если четыре частицы взаимодействуют друг с другом, они образуют две пары, и партнеры каждой пары присутствуют только в спаренных состояниях. Но также разумеется, что одновременное заполнение двух именно определенных спаренных состояний не может не быть результатом случайного стечения обстоятельств.

Естественно, что для  $N$  спаренных состояний:

$$\tilde{N}(\dots, \vec{V}_i, -\vec{V}_i, \dots, \vec{V}_N, -\vec{V}_N) = \prod_{i=1}^N \tilde{N}(|\vec{V}_i|). \quad (4.2,д)$$

Для произвольного числа пар частиц, взаимодействующих друг с другом в образце бесконечно большого объема и запол-

няющих бесконечно большое число спаренных состояний  $\vec{V}$ -пространства:

$$\tilde{N}(\dots, \vec{V}_i, -\vec{V}_i, \dots) = \prod_{i=1}^{\infty} \tilde{N}(|\vec{V}_i|).$$

Итак, признаками, отличающими коллектив четного числа частиц, взаимодействующих друг с другом (и не участвующих в дрейфе), являются соотношения:<sup>1)</sup>

$$0 < \tilde{N}(\vec{V}_i) < 1, \quad (4.1,а)$$

$$\tilde{N}(\vec{V}_i, -\vec{V}_i) = \tilde{N}(|\vec{V}_i|), \quad (4.1,б)$$

$$\tilde{N}(\vec{V}_i, \vec{V}_j) = 0, \text{ если } \vec{V}_i + \vec{V}_j \neq 0, \quad (4.1,в)$$

$$\tilde{N}(\dots, \vec{V}_i, -\vec{V}_i, \dots, \vec{V}_N, -\vec{V}_N) = \prod_{i=1}^N \tilde{N}(|\vec{V}_i|), \text{ если } N \geq 2. \quad (4.1,г)$$

#### §4.2. Необходимое отступление

Если приглядеться к соотношениям (4.1а,г), нетрудно подметить любопытные обстоятельства.

Во-первых, коллектив четного числа взаимодействующих друг с другом частиц можно представить состоящим из вдвое меньшего числа пар и тогда — ограничиться  $\vec{V}$ -полупространством спаренных состояний. В этом случае соотношения (4.1,б,в) автоматически исключаются из числа признаков отличия (нет более неспаренных состояний).

Во-вторых, пары как самостоятельные тождественные объекты выглядят невзаимодействующими друг с другом (то есть, пара с парой). В самом же деле из соотношения (4.1,г) следует, что одновременное заполнение двух и более спаренных состояний таким же числом пар есть совершенно случайное событие. Но именно так заполняют одночастичные (неспаренные) состояния частицы, пусть и взаимо-

<sup>1)</sup> Напомним, что каждая из частиц при этом может принимать участие еще и в индивидуальном взаимодействии с "телом взаимодействия".

действующие но — с неким телом, а не друг с другом. Заметим, что соотношение (4.1,г) представимо в виде

$$\tilde{N}(\dots, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_N) = \prod_{i=1}^N \tilde{N}(|\vec{V}_i|)$$

(где все  $\vec{V}_i$  принадлежат  $\vec{V}$ -полупространству, а  $N \geq 2$ )

В результате можно сделать важный вывод об эквивалентности коллектива четного числа частиц, участвующих во взаимодействии и с неким телом, и друг с другом, коллективу объектов — пар частиц, не участвующих во взаимодействии между парами, хотя и взаимодействующих с упомянутым телом. Признаками, отличающими такой коллектив, являются соотношения

$$0 < \tilde{N}(|\vec{V}_i|) < 1, \quad (4.1,д)$$

$$\tilde{N}(\dots, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_N) = \prod_{i=1}^N \tilde{N}(|\vec{V}_i|). \quad (4.1,е)$$

$V_y \geq 0$

Тот факт, что все  $\vec{V}_i$  принадлежат только полупространству скоростей, можно отобразить с помощью любого из трех соотношений (рис. 4.1):

$$V_x \geq 0, \quad V_y \geq 0, \quad V_z \geq 0.$$

А теперь попробуем “обратить” все сказанное. С этой целью представим себе, что, раз уж не пары взаимодействуют друг с другом, а только партнеры одной пары (каждой из пар), расстояние между партнерами любой пары гораздо меньше, чем между центрами инерции пар (рис. 4.2)

Такое представление вполне реально. Но только подчеркнем, что при этом друг с другом все частицы вовсе не взаимодействуют друг с другом и стало быть не образуют связанный коллектив<sup>1)</sup>.

Заметим, что в соответствии с изображенным на рис. 4.2 можно присвоить координаты партнерам каждой пары и их центрам инер-

1) См. рис. 2.8.

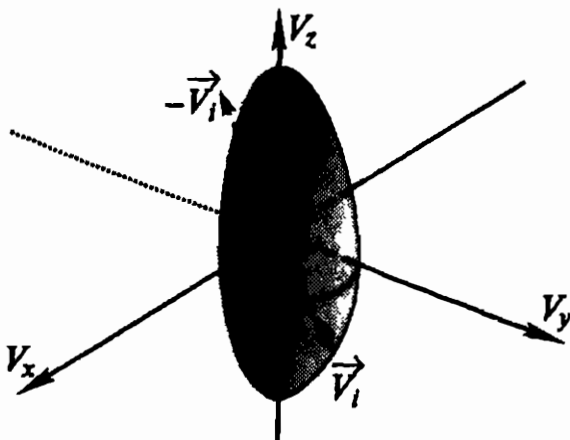


Рис. 4.1. Полупространство скоростей  $V_y \geq 0$ . Показаны для состояния, образующих одно ( $i$ -е) спаренное

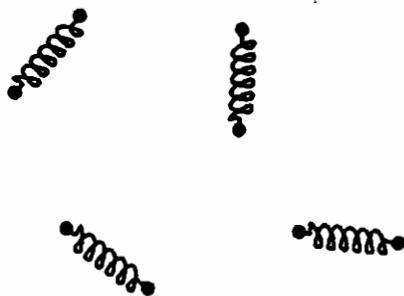


Рис. 4.2. Мгновенная конфигурация пар, не взаимодействующих друг с другом.

Частицы, являющиеся партнерами одной пары, не взаимодействуют с частицами-партнерами другой пары. В этом случае пары пространственно разобщены.

ции, после чего станет физически содержательным утверждение, что “эти” партнеры входят в состав только “этой” пары. Однако легко согласиться, что нельзя сказать того же самого, если все частицы образуют **связанный** коллектив (рис. 4.3). Конечно и в подобном коллективе, состоящем из бесконечно большого числа частиц, **обязательно** найдется вдвое меньшее число пар частиц, обладающих равными по модулю и противоположно направленными скоростями, причем вне всякой зависимости от расстояния между такими частицами. Если в пространство, занятое подобным коллективом, также ввести систему координат и зафиксировать в какой-нибудь момент

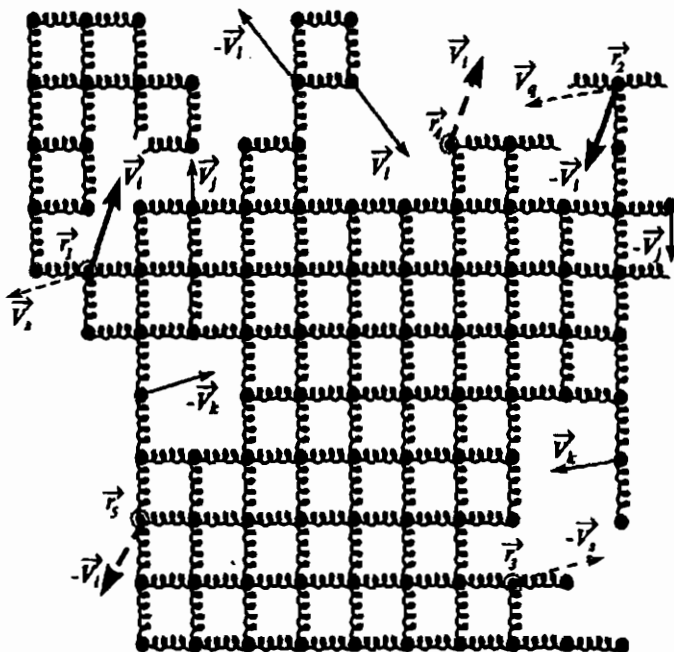


Рис. 4.3. Реалистическая мгновенная конфигурация скоростей частиц, взаимодействующих друг с другом.

Каждая частица «осциллирует» около «своего» положения равновесия, так что ее средняя по времени скорость равна нулю. Партнерами считаются две частицы, находящиеся (в любой момент времени) в определенном спаренном состоянии ( $\vec{V}_i$  и  $-\vec{V}_i$ ;  $\vec{V}_j$  и  $-\vec{V}_j$  и т.д.). В момент  $t_1$   $i$ -партнерами (по  $i$ -спаренному состоянию) оказываются частицы, находящиеся в точках  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  (все радиус-векторы проведены из выбранного раз и навсегда начала координат). Их скорости изображены сплошными стрелками. В момент  $t_2$  «те же» частицы (частицы, осциллирующие около тех же точек) не могут считаться партнерами. В момент  $t_2$   $i$ -партнерами оказываются частицы в точках  $\vec{r}_4$  и  $\vec{r}_5$ . В точках  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_3$  присутствует в момент  $t_2$   $s$ -партнеры. Один из  $q$ -партнеров присутствует в момент  $t_2$  в точке  $\vec{r}_2$ , а другой находится очень далеко. В момент  $t_1$  очень близки друг к другу  $i$ -партнеры. Показаны также  $j$ - и  $k$ -партнеры в момент  $t_1$ .

Таким образом частица, осциллирующая около определенной точки — любой из бесконечно большого их числа, — за бесконечно большое время побывает в качестве партнера частицы, осциллирующей около каждой другой точки.

Отметим, что мы в состоянии отличить точку от точки, введя систему координат, а кроме того считаем себя способными отличить один вектор скорости от другого.

времени координаты всех частиц (обладающих — все — разными скоростями), можно будет на мгновение указать на “эти” пары, как образованные “этими” партнерами (осциллирующими около точек с определенными координатами).

На рис. 4.3 представлена, в частности, частица, находящаяся в точке  $\vec{r}_1$ , и являющаяся в момент  $t$  партнером частицы находящейся в точке  $\vec{r}_2$ . Радиус-вектор центра инерции “этой” пары есть  $(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2})$ . Можно сказать, что “эта” (то есть, находящаяся в точке  $\vec{r}_1$ ) частица входит в момент  $t$  в состав “этой” пары (центр инерции которой находится в точке  $\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ ). Вполне очевидно, что в другой момент времени “эта” же частица войдет в состав “другой” пары (с другим радиусом-вектором центра инерции). По прошествии бесконечно большого промежутка времени все частицы побывают в составе всех пар.

Другими словами, в стационарном состоянии коллектива связанных воедино тождественных частиц каждая с равной вероятностью в любой момент времени входит в состав каждой из различных пар. При этом частицы, заполняющие именно определенные  $\vec{V}_i$ - и  $(-\vec{V}_i)$ -состояния (а партнерами мы называем только такие частицы), будут почти всегда далеки друг от друга и очень редко — по соседству. И поскольку это справедливо для любого  $i$ , среднее по времени расстояние между партнерами (заполняющими состояния, всякий раз образующие спаренное), гораздо больше, чем расстояние между ближайшими частицами<sup>1)</sup>, заполняющими состояния, практически никогда не образующие спаренное.

В заключение отметим, что, если все частицы связаны друг с другом, как показано на рис. 4.3 сила связи между частицами, удаленными на сколь угодно большое расстояние, точно такая же, как между ближайшими соседками вне зависимости от величин и направлений скоростей. Чтобы вырвать из связанного коллектива две ближайшие частицы или две, разделенные сколь угодно большим пространственным промежутком, нужно затратить одинаковую

<sup>1)</sup> Это ближайшее расстояние равно  $n^{-1/3}$ , где  $n$  — объемная концентрация частиц. Таким образом можно было бы сказать, что расстояние между центрами инерции “разных” пар гораздо меньше, чем расстояние между партнерами “любой” пары.



энергию. Эта энергия не может быть сколь угодно малой. Она тем больше, чем больше частиц связано воедино, то есть — чем больше заполненных спаренных состояний.

### §4.3. Постановка задачи

Итак, соотношения (4.1, д, е) являются признаками отличия коллектива частиц, которые взаимодействуют именно друг с другом. Особо подчеркнем, что возможны два принципиально разных типа коллективов.

Первый тип, когда взаимодействуют друг с другом только две частицы, образующие отдельную пару, а сами пары разобщены до такой степени, что частицы пространственно разобщенных пар не взаимодействуют друг с другом (рис. 4.2). Признаком отличия такого коллектива является условие

$$2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}(|\vec{V}_i|) = 2, \quad (4.1, ж)$$

означающее, что число частиц точно равно двум<sup>1)</sup>.

Второй тип, когда взаимодействием друг с другом охвачены все (четыре и более) частицы. Признаком отличия такого коллектива является условие

$$\sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}(|\vec{V}_i|) = N, \quad (4.1, з)$$

где  $N \geq 2$  — число пар.

Таким образом возникает проблема описать состояния коллективов обоих типов и установить виды зависимости  $\tilde{N}(|\vec{V}|)$  при соблюдении условий (4.1, д, е, ж или з).

Как было сказано в главе 2, для нахождения функции  $\tilde{N}(|\vec{V}|)$  достаточно располагать зависимостью полной энергии коллектива от величины  $\tilde{N}(|\vec{V}|)$ . Далее, если мы имеем дело с коллективом бесконечно большого числа пар частиц, к которому применимы понятия

<sup>1)</sup> Частицы каждой пары находятся в одинаковом состоянии.

температуры и уровня Ферми, можно найти  $\tilde{N}(|\vec{V}\rangle)$ , минимизируя, например, полную (при  $T=0$ ) энергию при некотором дополнительном условии.

В любом случае для расчета полной энергии коллектива целесообразно попробовать решить уравнение Шредингера

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

с оператором полной энергии, которой в представлении чисел заполнения имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{\infty} E_i c_i^{\dagger} c_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j \\ k \neq i}}^{\infty} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j \\ l \neq i}}^{\infty} U_{ijkl} c_i^{\dagger} c_j^{\dagger} c_k c_l. \quad (4.3, a)$$

Здесь для кратности обозначено  $E(\vec{V}_i) \equiv E_i$ , а  $U_{ijkl}$  — матричный элемент перехода двух частиц (обязательно участвующих во взаимодействии друг с другом) из состояний со скоростями  $\vec{V}_k$  и  $\vec{V}_l$  в состояния со скоростями  $\vec{V}_i$  и  $\vec{V}_j$ . В выражении (4.3,а) все скорости принадлежат пространству, а не полупространству скоростей. Что касается величин  $c_i^{\dagger}$  и  $c_i$ , то это операторы соответственно возникновения частицы в  $\vec{V}_i$ -состоянии и исчезновения из него. Наконец,  $|\Psi\rangle$  и  $E$  — это вектор состояния и полная энергия коллектива.

#### §4.4. Упрощение задачи

Учитывая установленную в §4.2 эквивалентность коллектива взаимодействующих друг с другом частиц коллективу пар, взаимодействующих — каждая как цельный (самостоятельный) объект с неким “телом”, но — не друг с другом, мы имеем возможность сильно упростить задачу. Как же должны тогда выглядеть гамильтониан и вектор состояния?

Согласно принципам квантовой теории, операторы полной энергии ( $\hat{H}$ ) и числа частиц ( $\hat{N}$ ) обязаны коммутировать ( $\hat{H}\hat{N} = \hat{N}\hat{H}$ ), и, следовательно, у них должна быть общая полная система собственных векторов. А поскольку нам известны все собственные векторы оператора  $\hat{N}$ , безусловно среди них окажутся и те, которые являются собственными оператором  $\hat{H}$ . Чтобы распознать эти век-

торы, необходимо учесть, что мы имеем дело с коллективом  $N$  частиц. Тогда каждый из упомянутых общих собственных векторов ( $|\Psi_N(E_N)\rangle$ ) операторов  $\hat{H}$  и  $\hat{N}$  должен удовлетворять условию

$$\hat{N}|\Psi_N(E_N)\rangle = N|\Psi_N(E_N)\rangle,$$

где  $\hat{N} \equiv \sum_{i=1}^{\infty} c_i^+ c_i$ ,  $N$  — целое число (частиц),  $E_N$  — значение энергии коллектива, устанавливаемое из решения уравнения

$$\hat{H}|\Psi_N(E_N)\rangle = E_N|\Psi_N(E_N)\rangle.$$

Располагая полной системой собственных векторов оператора  $\hat{N}$ , легко построить вектор  $|\Psi_N(E_N)\rangle$ :

$$|\Psi_N(E_N)\rangle = \left\{ \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k \\ \dots \\ \dots}}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ \dots \\ \dots}}^{\infty} \dots}_{N \text{ сумм}} \underbrace{(a_{\dots ij \dots})}_{N \text{ индексов}} \cdot \underbrace{(\dots c_i^+ c_j^+ \dots)}_{N \text{ сомножителей}} \right\} |0\rangle, \quad (4.4)$$

где  $a_{ij\dots} = -a_{\dots ji}$  и т.п., причем  $a_{ij\dots}$  должны быть функциями  $E_N$ ;  $N$  — целое число (частиц).

В частности,

$$|\Psi_0(0)\rangle = |0\rangle,$$

$$\langle 0|0\rangle = 1;$$

$$|\Psi_1(E_1)\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i^+ \right\} |0\rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1(E_1) | \Psi_1(E_1) \rangle &= \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = 1; \end{aligned}$$

$$|\Psi_2(E_2)\rangle = \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij} c_i^+ c_j^+ \right\} |0\rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_2(E_2) | \Psi_2(E_2) \rangle &= \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij}^2 = 1; \end{aligned}$$

и т.п.

Далее можно доказать, что

$$\hat{H}|\Psi_N(E_N)\rangle = E_N|\Psi_N(E_N)\rangle.$$

Имея ввиду все сказанное, напомним, что в нашем случае самостоятельным объектом является не частица, а пара, что и отражено в принятых условиях (4.1,б,в). Поэтому векторы  $|\Psi_N(E_N)\rangle$  в виде (4.4) придется редуцировать, оставив в них только часть, соответствующую этим условиям. После этого имеем:

если пар нет вообще, то  $|\Psi_0\rangle = |0\rangle$ ;

если пар одна, то

$$|\Psi_1\rangle = \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} a_{i,-i} c_i^+ c_{-i}^+ \right\} |0\rangle \equiv \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} a_i b_i^+ \right\} |0\rangle, \quad (4.5,а)$$

где  $b_i^+ \equiv c_i^+ c_{-i}^+$ ;

если пар две, то

$$|\Psi_2\rangle = \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_y \geq 0}}^{\infty} a_{ij} b_i^+ b_j^+ \right\} |0\rangle; \quad (4.5,б)$$

если пар  $N$ , то

$$|\Psi_N\rangle = \left\{ \sum_{\substack{i_1=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \dots \sum_{\substack{i_N=1 \\ \dots \\ i_2 \neq 1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} a_{i_1 \dots i_N} b_{i_1}^+ \dots b_{i_N}^+ \right\} |0\rangle.$$

Естественно, что при этом и в гамильтониане (4.3,а) действующей автоматически остается только часть его, равная

$$\hat{H} = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} E_i c_i^+ c_i + \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_y \geq 0}}^{\infty} U_{ij} c_i^+ c_{-i}^+ c_{-j} c_j \equiv$$

$$\equiv 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} E_i b_i^+ b_i + \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} b_i^+ b_j. \quad (4.3,6)$$

Преобразованный гамильтониан<sup>1)</sup> имеет как раз такой вид, который свидетельствует о взаимодействии объектов (пар) каждого в отдельности с неким "телом", но не друг с другом.

Теперь подведем итоги.

Пользуясь гамильтонианом (4.3,6) и векторами состояния, мы должны вычислить энергию, решая уравнение

$$\hat{H}|\Psi_N\rangle = E_N|\Psi_N\rangle, \quad (4.6,а)$$

требуя при этом обязательного условия нормировки

$$\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle = 1 \quad (4.6,б)$$

и дополнительно требуя выполнения условий:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N | c_i^+ c_i | \Psi_N \rangle &\equiv \langle \Psi_N | c_i^+ c_i c_{-i}^+ c_{-i} | \Psi_N \rangle \equiv \\ &\equiv \langle \Psi_N | b_i^+ b_i | \Psi_N \rangle \equiv \tilde{N}_i, \end{aligned} \quad (4.6,в)$$

означающего недопустимость интерпретации среднего<sup>1)</sup> значения оператора числа частиц в  $i$ -м неспаренном или  $i$ -м спаренном состоянии иначе, как степени заполнения  $i$ -го (неспаренного или спаренного) состояния (одной частицей или двумя частицами соответственно);

$$0 < (\langle \Psi_N | c_i^+ c_i | \Psi_N \rangle) < 1 \quad (0 < (\langle \Psi_N | b_i^+ b_i | \Psi_N \rangle) < 1), \quad (4.6,г)$$

отображающего участие каждой частицы (пары) во взаимодействии;

$$\langle \Psi_N | \left( \prod_{i=1}^{\infty} b_i^+ b_i \right) | \Psi_N \rangle = \prod_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i = N, \text{ если } N \geq 2. \quad (4.6,д)$$

1) Это и есть гамильтониан БКШ (см. п. 3.2.3, выражение (3.42)).

Соотношения (4.6,а—г) должны иметь место в случае, когда  $N=1$ , и следовательно:

$$|\Psi_{N=1}\rangle \equiv |\Psi_1\rangle = \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} a_i b_i^+ \right\} |0\rangle, \quad (4.5,а)$$

$$\langle \Psi_1 | b_i^+ b_i b_j^+ b_j | \Psi_1 \rangle = \langle \Psi_1 | b_i^+ b_i b_j^+ b_j b_k^+ b_k | \Psi_1 \rangle = \dots = 0. \quad (4.6,е)$$

Заметим, что равенство (4.1,ж)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i = 1,$$

фигурировавшее в качестве условия, ограничивающего число пар частиц, преобразуется теперь к виду

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i &= \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} (\langle \Psi_1 | c_i^+ c_i | \Psi_1 \rangle) = \\ &= \langle \Psi_1 | \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} c_i^+ c_i \right\} | \Psi_1 \rangle \equiv \langle \Psi_1 | \hat{N} | \Psi_1 \rangle = 1, \end{aligned}$$

поскольку  $\langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle = 1$ , а  $\hat{N} | \Psi_1 \rangle = 1 \cdot | \Psi_1 \rangle$ .

Равенство же

$$\langle \Psi_1 | \hat{N} | \Psi_1 \rangle = 1,$$

в котором среднее по времени значение оператора  $\hat{N}$  (число пар) совпадает с его собственным значением, означает, что число пар, принимающих участие во взаимодействии (с неким “телом”), не флуктуирует во времени.

Соотношения (4.6,а—д) должны иметь место в случае, когда  $N \geq 2$ , и следовательно тогда:

$$|\Psi_N\rangle = \left\{ \sum_{\substack{i_1=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \dots \sum_{\substack{i_N=1 \\ l_2 \neq i_1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} a_{i_1 \dots i_N} \cdot b_{i_1}^+ \dots b_{i_N}^+ \right\} |0\rangle, \quad (4.4)$$

$$\hat{N}|\Psi_N\rangle = N|\Psi_N\rangle.$$

Заметим, что теперь уже равенство (4.1,з)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i = N \quad (\text{где } N \geq 2)$$

преобразуется к виду

$$\langle \Psi_N | \hat{N} | \Psi_N \rangle = N,$$

где  $N \geq 2$  и представляет собой собственное значение оператора  $\hat{N}$ .

Это, как и в предыдущем случае означает, что число пар не флуктуирует во времени.

Итак мы окончательно сформулировали задачу, но : совместимы ли соотношения (4.5,а), (4.6,а—г) в одном случае и соотношения (4.4), (4.6,а—д) в другом случае?

#### §4.5 “Коллектив”, состоящий из одной пары

Разумеется, участие одной пары как цельного объекта во взаимодействии может означать только то, что пара взаимодействует с неким “телом”. Обратившись к вектору  $|\Psi_1\rangle$  в виде (4.5,а), легко проверить, что:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = 1,$$

$$\langle \Psi_1 | c_i^+ c_i | \Psi_1 \rangle = \langle \Psi_1 | c_i^+ c_i c_{-i}^+ c_{-i} | \Psi_1 \rangle = a_i^2, \quad 0 < a_i^2 < 1,$$

$$\langle \Psi_1 | b_i^+ b_i b_j^+ b_j | \Psi_1 \rangle = \langle \Psi_1 | b_i^+ b_i b_j^+ b_j b_k^+ b_k | \Psi_1 \rangle = \dots = 0.$$

Таким образом, поскольку величина  $\langle \Psi_1 | b_i^\dagger b_i | \Psi_1 \rangle$  (квантовое среднее) есть, по определению, вероятность того, что одна частица находится в  $i$ -м неспаренном состоянии (а одна пара — в  $i$ -м спаренном состоянии), необходимо отождествить упомянутую величину со средней (по времени) степенью заполнения состояния. После этого можно представить вектор  $|\Psi_1\rangle$  в виде

$$|\Psi_1\rangle = \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i^{1/2} b_i^\dagger \right\} |0\rangle. \quad (4.7)$$

Убедившись, что условия (4.6,б-г,е) и (4.5,а) совместимы, вычислим энергию пары, участвующей во взаимодействии. При этом заметим, что критерием возможности существования такого состояния двух взаимодействующих друг с другом частиц, в котором обе они связываются в одну пару, служит соотношение

$$2 E_{\text{своб}} - E_1 = \Delta > 0, \quad (4.8)$$

где  $E_{\text{своб}}$  — энергия одной свободной частицы;  $E_1$  — полная энергия двух частиц, образовавших пару.

Приступим к вычислению величины  $E_1$ .

Действуя  $\hat{H}$  на  $|\Psi_1\rangle$ , получаем

$$\hat{H} |\Psi_1\rangle = \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \left( 2 E_i + \frac{1}{\tilde{N}_i^{1/2}} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \tilde{N}_j^{1/2} \right) \cdot \tilde{N}_i^{1/2} b_i^\dagger \right\} |0\rangle. \quad 1) \quad (4.9)$$

Проверим, существует ли величина

$$E_1 \equiv 2 E_i + \frac{\sum_{\substack{j=1, j \neq i \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \tilde{N}_j^{1/2}}{\tilde{N}_i^{1/2}}, \quad (4.10)$$

1) Оператор  $\hat{H}$  имеет вид (4.3,б).



которая при любом  $i$  "преобразует" уравнение (4.9) к виду

$$\hat{H} |\Psi_1\rangle = E_1 |\Psi_1\rangle.$$

Представим выражение (4.10) в виде системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -(E_1 - 2 E_{(1)}) \cdot \bar{N}_1^{1/2} + U_{21} \cdot \bar{N}_2^{1/2} + U_{31} \cdot \bar{N}_3^{1/2} + \dots = 0, \\ U_{12} \cdot \bar{N}_1^{1/2} - (E_1 - 2 E_{(2)}) \cdot \bar{N}_2^{1/2} + U_{32} \cdot \bar{N}_3^{1/2} + \dots = 0, \\ U_{13} \cdot \bar{N}_1^{1/2} + U_{23} \cdot \bar{N}_2^{1/2} - (E_1 - 2 E_{(3)}) \cdot \bar{N}_3^{1/2} + \dots = 0, \\ \dots \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \dots \qquad \dots = 0. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Учтем что

$$U_{ij} = U_{ji}. \quad (4.12)$$

Если считать, что неизвестными в системе (4.11) являются величины  $\bar{N}_i$ , то система (4.11) будет разрешимой при  $\bar{N}_i^{1/2} \neq 0$  только, если

$$\left| \begin{array}{cccc} -(E_1 - 2 E_{(1)}) & U_{21} & U_{31} & \dots \\ U_{12} & -(E_1 - 2 E_{(2)}) & U_{32} & \dots \\ U_{13} & U_{23} & -(E_1 - 2 E_{(3)}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| = 0. \quad (4.13)$$

Из (4.13) следует бесконечное множество значений величины  $E_1$  (корней уравнений (4.13), в котором в роли неизвестной выступает  $E_1$ ). Раскрыв определитель в (4.13), получаем с учетом (4.12)

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0 \\ j \neq i \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \frac{U_{ij} \cdot U_{ji}}{(E_1 - 2 E_i) \cdot (E_1 - 2 E_j)} + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0 \\ j \neq i \\ V_y \geq 0 \\ k \neq j \\ V_y \geq 0 \\ k \neq i \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \frac{U_{ij} \cdot U_{jk} \cdot U_{ki}}{(E_1 - 2 E_i) \cdot (E_1 - 2 E_j) \cdot (E_1 - 2 E_k)} - \frac{1}{24} \sum \sum \sum \sum \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Чтобы использовать выражение (4.14) в конструктивных целях — найти хотя бы одно единственное значение  $E_1$  (из множества  $E_{1,\nu}$ , где  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ), придется сделать ряд предположений.

Перепишем сначала соотношение (4.10) в виде

$$\tilde{N}_{i,\nu}^{1/2} = \frac{1}{E_{1,\nu} - 2E_i} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \tilde{N}_{j,\nu}^{1/2}, \quad (4.15)$$

где  $\nu$  — номер корня уравнения (4.14).

Выдвинем первое предположение, что величина  $U_{ij}$  допускает представление в виде:

$$U_{ij} = u_i \cdot u_j, \quad (4.16)$$

Тогда

$$\tilde{N}_{i,\nu}^{1/2} = \frac{u_i}{E_{1,\nu} - 2E_i} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} u_j \cdot \tilde{N}_{j,\nu}^{1/2}. \quad (4.17)$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_{j,\nu}^{1/2} \gg \sum_{\substack{j=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_{j,\nu}, \quad (4.18)$$

так как  $\sum_{j=1, \nu_y \geq 0}^{\infty} \tilde{N}_{j,\nu} = 1$ .

В таком случае, поскольку  $\tilde{N}_{i,\nu}^{1/2} < 1$ , можно считать, что

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_{j,\nu}^{1/2} \gg \tilde{N}_{i,\nu}^{1/2}$$

для любых  $j$  и  $i$ , и тогда положить

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_{j,\nu}^{1/2} = \left( \sum_{\substack{j=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_{j,\nu}^{1/2} \right) - \tilde{N}_{i,\nu}^{1/2} = \sum_{\substack{j=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_{j,\nu}^{1/2}. \quad (4.19)$$

Выдвинем еще два предположения: о том, что все  $U_{ij}$ , равно как  $u_i$ , одного знака и что различие между всеми  $u_i$  невелико. Тогда на основании (4.19) можно записать, что

$$\sum_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} u_j \cdot \bar{N}_{j,v}^{1/2} \gg u_j \cdot \bar{N}_{j,v}^{1/2} \quad (4.20)$$

и

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_y \geq 0}}^{\infty} u_j \cdot \bar{N}_{j,v}^{1/2} = \sum_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} u_j \cdot \bar{N}_{j,v}^{1/2} \equiv K_v. \quad (4.21)$$

Подчеркнем, что сумма по всем  $j$  не может зависеть от индекса  $j$ , так что  $K_v$  — просто некоторая константа, зависящая только от номера корня уравнения (4.14). Обратим внимание на то, что, используя соотношение (4.21), — результат всех предположений, — мы можем заменить истинное равенство (4.17) приближенным

$$\bar{N}_{i,v}^{1/2} = \frac{u_i \cdot K_v}{E_{1,v} - 2E_i}, \quad (4.22)$$

в котором в правой части присутствует в качестве параметра величина  $E_{1,v}$ , значение которой находится из уравнения (4.14), не содержащего  $\bar{N}_{i,v}^{1/2}$ .

“Раскрыв” константу  $K_v$  в (4.22) с помощью выражения (4.21), получим:

$$\bar{N}_{i,v}^{1/2} = \frac{u_i \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} u_i \cdot \bar{N}_{i,v}^{1/2}}{E_{1,v} - 2E_i}. \quad (4.23)$$

Согласно (4.23) и (4.20):

$$\bar{N}_{i,v}^{1/2} = \frac{u_i}{E_{1,v} - 2E_i} \cdot \left( \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} u_i \cdot \bar{N}_{i,v}^{1/2} \right) \gg \frac{u_i}{E_{1,v} - 2E_i} \cdot (u_i \cdot \bar{N}_{i,v}^{1/2}),$$

откуда следует, что

$$1 \gg \frac{u_i^2}{E_{1,v} - 2E_i}. \quad (4.24)$$

Неравенство (4.24) отбирает все те корни уравнения (4.14)  $E_{1,v}$ , значения которых, если таковые существуют, позволяют использовать выражение (4.22).

Снимем для упрощения индекс  $v$  с тех  $E_{1,v}$ , для которых справедливо (4.24). Используя (4.22) и (4.21), напишем

$$K = \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_i \geq 0}}^{\infty} u_i \cdot \frac{u_i \cdot K}{E_1 - 2E_i} = K \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_i \geq 0}}^{\infty} \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i}.$$

Сокращая обе части этого уравнения на  $K$ , приходим к выражению

$$1 = \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_i \geq 0}}^{\infty} \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i}, \quad 1) \quad (4.25)$$

позволяющему вычислить энергию  $E_1$ , если известны величины  $u_i$  и  $E_i$  для всех  $i$ .

1) Условия (4.16), (4.20) позволяют преобразовать (4.14) к виду

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} \left( \sum_i \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \sum_i \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i} \right)^3 - \dots = \\ & = 1 - \frac{1}{2} \left( \sum_i \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i} \right)^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left( \sum_i \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i} \right) \cdot \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \sum_i \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i} \right) \cdot [1 - \dots] \right] \right\} = \\ & = 2 - \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_i \geq 0}}^{\infty} \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i} - \exp \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_i \geq 0}}^{\infty} \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $\sum_{i=1, \nu_i \geq 0}^{\infty} \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i} = 1,84$ . Однако у этого результата и формулы (4.25) разные степе

ни точности использования приближений. Вполне возможно, что величину  $E_1$  можно вычислить еще одним способом (или несколькими другими способами). Так что и по этой причине нельзя давать слишком большого значения различию между

величинами суммы  $\sum_{i=1, \nu_i \geq 0}^{\infty} \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i}$ .

Выражение (4.15) отображает специфический эффект.<sup>1)</sup> Чтобы сделать его наглядным, положим  $U_{ij} = U_0 = \text{const}$  и ограничим число членов суммы. Обозначим:

$$U_0 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^M \tilde{N}_j^{1/2} \equiv \xi_i(M), \quad (4.26)$$

где  $M$  — конечное число.

Тогда

$$\tilde{N}_i^{1/2} = \frac{\xi_i(M)}{E_1 - 2E_i}. \quad (4.27)$$

Видно, что чем больше слагаемых в выражении (4.26), тем больше абсолютное значение  $\xi_i(M)$ , и, стало быть, тем больше абсолютная величина каждого слагаемого (см. формулу (4.27)). Можно сказать по-другому: степень заполнения  $i$ -го состояния тем больше, чем больше степень заполнения каждого из остальных состояний и чем больше этих состояний.

Итак, используя три предположения: о соизмеримости всех  $U_{ij}$ , об одинаковости знака для любых комбинаций  $i$  и  $j$ , о представлении  $U_{ij}$  в виде  $u_i \cdot u_j$ , мы довели расчет полной энергии одной пары (участвующей во взаимодействии) до уравнения (4.25), содержащего одно неизвестное.

Покажем теперь на примере одной частицы, что энергия коллектива точно определенного — не флуктуирующего — числа пар (или частиц) не зависит от величин  $\tilde{N}_i$  (то есть — от характера заполнения состояний в  $\vec{V}$ -пространстве). В этом случае невозможно и нахождение вида функции  $\tilde{N}(|\vec{V}|)$  с помощью процедуры минимизации.<sup>2)</sup>

1) Применительно к одночастичному коллективу нет смысла называть его кооперативным — под таким именем он известен в коллективе многих взаимодействующих частиц.

2) Напомним, что  $\tilde{N}(|\vec{V}|) = \tilde{N}(E(|\vec{V}|)) = \tilde{N}(E)$ , то есть  $\tilde{N}_i = \tilde{N}(|\vec{V}_i|) = \tilde{N}(E_i)$

Выразим сначала с помощью величин  $\tilde{N}_i$  среднее значение энергии:

$$\langle E_1 \rangle = \langle \Psi_1 | \hat{H} | \Psi_1 \rangle = \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \left( 2E_i \cdot \tilde{N}_i + \tilde{N}_i^{1/2} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_y \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \tilde{N}_j^{1/2} \right). \quad (4.28)$$

Теперь, чтобы установить явный вид зависимости  $\tilde{N}$  от  $E_i$  и  $U_{ij}$ , необходимы самостоятельные соображения. Потребуем, например, чтобы упомянутые зависимости обеспечивали наименьшее значение квантового среднего  $\langle E_1 \rangle$ . Это — известный принцип минимума полной энергии. Нам придется искать минимум  $\langle E_1 \rangle$  при условии, что

$$\sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i = 1.$$

Стандартный математический прием минимизации функции  $F(x_i, \dots)$  при условии (дополнительном), что другая функция тех же переменных  $D(x_i, \dots) = 0$ , состоит в использовании так называемого неопределенного множителя (Лагранжа)  $L$ . Последний играет роль параметра в выражении

$$Y = F - L \cdot D,$$

где  $Y$  — новая функция, подлежащая минимизации.

Условия  $\frac{dY}{dx_i} = 0$  позволяют найти ту совокупность  $x_i$ , которой отвечает наименьшая  $F$ . Применительно к нашему случаю:

$$F(x_i, \dots) \equiv \langle E_1(\tilde{N}_i) \rangle,$$

$$D(x_i, \dots) \equiv \left[ \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i \right] - 1,$$

$$Y \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left( 2E_i \cdot \bar{N}_i + \bar{N}_i^{1/2} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \bar{N}_j^{1/2} \right) \right\} - L \cdot \left[ \left( \sum_{i=1}^{\infty} \bar{N}_i \right) - 1 \right].$$

Из условия

$$\frac{dY}{dx_i} = 0$$

получаем

$$(2E_i - L) \cdot \bar{N}_i^{1/2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \bar{N}_j^{1/2} = 0.$$

Отсюда

$$\bar{N}_i = \left( \frac{\xi_i}{L - 2E_i} \right)^2, \quad (4.29)$$

где

$$\xi_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \bar{N}_j^{1/2}. \quad (4.30)$$

Вновь используя предположения (4.16), (4.21), приходим к выражению

$$\sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \frac{u_i^2}{L - 2E_i} = 1, \quad (4.31)$$

позволяющему найти множитель Лангранжа  $L$ <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Подставив (4.29), (4.30) в (4.28), получим

$$\langle E_1 \rangle = \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \left[ 2E_i \cdot \frac{\xi_i^2}{(L - 2E_i)^2} + \frac{\xi_i^2}{L - 2E_i} \right] = L \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \left( \frac{\xi_i}{L - 2E_i} \right)^2 = L \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \bar{N}_i = L.$$

Видно, что процедура минимизации привела к необходимости решать уравнение (4.29), которое представляет собой уже знакомое уравнение (4.17), возведенное в квадрат. Иначе установить зависимость  $\bar{N}$  от  $E_i$  не удастся.

#### §4.6. Куперовская электронная пара<sup>1)</sup>

Доведем до конца вычисление энергии  $E_1$  и проверим, удовлетворяется ли критерий (4.8). Если — да, это будет означать, что и энергетически двум взаимодействующим частицам выгоднее связаться друг с другом.

Итак, вернемся к уравнению (4.25).

Используя плотность состояний в  $\vec{V}$ -пространстве

$$G_{\vec{V}} = 2 \cdot \left( \frac{m}{2\pi \hbar} \right)^3,$$

перейдем в уравнении (4.25) от суммирования к интегрированию по  $\vec{V}$ -полупространству:

$$\frac{1}{v} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ v_i \geq 0}}^{\infty} \frac{u_i^2}{E_1 - 2E_i} = \int_{\vec{V}} \frac{u^2(\vec{V})}{E_1 - 2E(\vec{V})} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 4\pi V^2 \cdot dV \right] \cdot 2 \left( \frac{m}{2\pi \hbar} \right)^3 = \frac{1}{v}.$$

Здесь  $v$  — объем обычного пространства, занятого образцом металла.

Далее заметим, что

$$4\pi V^2 dV \cdot 2 \left( \frac{m}{2\pi \hbar} \right)^3 = G_E(E) \cdot dE,$$

где  $E = \frac{m \cdot V^2}{2}$ , а  $G_E(E)$  — зависящая от энергии плотность уже энергетических состояний —

$$\left( \frac{\text{число разных состояний с энергией } E}{1 \text{ эВ} \cdot 1 \text{ см}^3} \right).$$

<sup>1)</sup> Л. Купер впервые доказал возможность существования пары связанных взаимодействием электронов, принадлежащих (в отсутствие взаимодействия) зоне проводимости металла.



Итак, вместо уравнения (4.25) пишем

$$v \cdot \int_E \frac{u^2(E)}{E_1 - 2E} \cdot \frac{1}{2} G_E(E) \cdot dE = 1 \quad (4.32)$$

Теперь необходимо выделять какой-то интервал энергий, доступный для участвующей во взаимодействии пары. Чтобы придать всей задаче оттенок реализма, положим:

$$F - \hbar \omega_D \leq E \leq F + \hbar \omega_D,$$

где  $F$  — уровень Ферми типичного металла при  $T = 0$ ;  $\hbar \omega_D$  — энергия дебаевского фонона также типичного металла. Для упрощения расчета допустим, что  $u^2$  не зависит от  $E$ , а кроме того, что  $\hbar \omega_D \ll F$ , и потому  $G_E(E) = G_E(F)$  в интервале  $\pm \hbar \omega_D$  около  $F$ . С учетом этих допущений уравнение (4.32) преобразуем к виду

$$\frac{2}{u^2 \cdot v \cdot G_E(F)} = \int_{F - \hbar \omega_D}^{F + \hbar \omega_D} \frac{dE}{E_1 - 2E} = -\frac{1}{2} \ln \frac{E_1 - 2(F + \hbar \omega_D)}{E_1 - 2(F - \hbar \omega_D)},$$

откуда следует, что

$$E_1 = 2(F - \hbar \omega_D \cdot \frac{e^{-\frac{4}{\beta}} + 1}{e^{-\frac{4}{\beta}} - 1}), \quad (4.33)$$

где  $\beta \equiv u^2 \cdot v \cdot G_E(F)$ .

Остается проверить, удовлетворяется ли критерий (4.8). Для этого нужно указать какое-то значение энергии  $E_{\text{своб}}$ . Выберем (в запас надежности) наименьшее из выделенного интервала энергий:

$$E_{\text{своб}} = F - \hbar \omega_D.$$

Совершенно очевидно, что ожидаемое уменьшение энергии пары (величины  $E_1$ ) по сравнению с энергией (величиной  $2(F - \hbar \omega_D)$ ) двух свободных частиц возможно только при условии

$$u^2 \equiv U < 0. \quad (4.34)$$

Это значит, что взаимодействие между ранее свободными электронами должно носить притягивательный характер.

Вспомним теперь вывод, к которому мы пришли в п. 1.5.4 о необходимости связывания электронов в сверхпроводнике именно “плюс-зарядами”. Налицо согласованность этого вывода с условием (4.34). Конечно, будучи отрицательно заряженными, электроны могут притягиваться друг к другу только через посредство “плюс-заряда”.

Отметим в заключение существенное обстоятельство. Пусть “потенциал”  $U$  очень мал по абсолютной величине. Тогда

$$\exp\left(\frac{4}{|U| \cdot v \cdot G_E(F)}\right) \gg 1,$$

и

$$\begin{aligned} 2E_{\text{своб}} - E_1 &= 2(F - \hbar \omega_D) - 2\left\{F - \hbar \omega_D \cdot \left[1 + 2 \exp\left(-\frac{4}{|U| \cdot v \cdot G_E(F)}\right)\right]\right\} = \\ &= 4 \hbar \omega_D \cdot \exp\left(-\frac{4}{|U| \cdot v \cdot G_E(F)}\right). \end{aligned}$$

То есть, достаточно даже очень слабого притяжения, чтобы две свободные частицы связались в пару (энергия пары становится все же меньше энергии двух свободных частиц). Это — прямое следствие кооперативного эффекта, отмеченного в §4.5 (с. 196): бесконечно большое число состояний, “участвующих” во взаимодействии, компенсирует слабость последнего.

#### §4.7. Двухчастичный коллектив

Несмотря на то, что это коллектив многочастичный, мы будем считать в соответствии с принятым в §4.4 условием, что каждая из его частиц участвует во взаимодействии только с неким “телом”, но не друг с другом. Тогда, используя оператор  $\hat{H}$  в виде (4.3,6) и вектор  $|\Psi\rangle$  в виде

$$|\Psi\rangle \equiv |\Psi_2\rangle = \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_i \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ \nu_j \geq 0}}^{\infty} a_{ij} b_i^+ b_j^+ \right\} |0\rangle, \quad (4.5,6)$$

можно доказать существование такой величины  $E_2$ , что

$$\hat{H} |\Psi_2\rangle = E_2 |\Psi_2\rangle.$$

Поскольку условие  $\langle \Psi_2 | \Psi_2 \rangle = 1$  является обязательным, остается проверить выполнимость условий:

$$\langle \Psi_2 | c_i^\dagger c_i | \Psi_2 \rangle = \bar{N}_i$$

(тогда должно быть справедливым неравенство  $0 < (\langle \Psi_2 | c_i^\dagger c_i | \Psi_2 \rangle) < 1$ );

$$\langle \Psi_2 | c_i^\dagger c_i c_j^\dagger c_j | \Psi_2 \rangle = \bar{N}_i \cdot \bar{N}_j.$$

Так как из обязательного условия нормировки следует, что

$$\sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} a_{ij}^2 \right) = 1,$$

а

$$\langle \Psi_2 | c_i^\dagger c_i | \Psi_2 \rangle = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} a_{ij}^2,$$

то конечно  $0 < (\langle \Psi_2 | c_i^\dagger c_i | \Psi_2 \rangle) < 1$ .

Однако легко видеть, что величина  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} a_{ij}^2$  представляет собой ве-

роятность того, что одна частица находится в  $i$ -м состоянии, а другая в тот же момент в любом из всех остальных состояний. Таким образом нельзя отождествить среднее значение оператора  $(c_i^\dagger c_i)$  со степенью заполнения одного состояния одной частицей, если вектор двухчастичного коллектива имеет вид (4.5,6). Теперь уже нет смысла анализировать величину

$$\langle \Psi_2 | c_i^\dagger c_i c_j^\dagger c_j | \Psi_2 \rangle.$$

### §4.8. Изменения в постановке задачи

Выяснилось, что не все соотношения (4.6,б—д) совместимы, если вектор  $|\Psi_N\rangle$  имеет вид (4.4) при  $N \geq 2$ . Но поскольку коллектив частиц, которые все взаимодействуют друг с другом, состоит из большого числа пар, мы оказываемся в драматической ситуации. Выбрав вектор  $|\Psi_N\rangle$  в виде (4.4) с точно заданным числом частиц, мы можем найти энергию коллектива  $E_N$ , но в принципе не можем ввести величину  $\bar{N}_i$ . Если же мы подберем вектор  $|\Psi\rangle$ , позволяющий это сделать (тогда при  $N \geq 2$ :  $\langle \Psi | c_i^\dagger c_i | \Psi \rangle \equiv \bar{N}_i$ ,  $0 < \bar{N}_i < 1$ ), то не сможем найти энергию коллектива из решения уравнения Шредингера. Ведь вектор  $|\Psi_N\rangle$  — единственный собственный вектор оператора  $\hat{H}$ , отвечающий заданному числу пар  $N$ .

К счастью, мы можем воспользоваться рекомендацией, следующей из квантовой теории: найти среднее по времени значение энергии коллектива, содержащего в среднем по времени некоторое число пар частиц. Это означает возможность найти энергию по формуле

$$\langle E \rangle = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle, \quad (4.35)$$

а число пар частиц — по формуле

$$\langle N \rangle = \langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle,$$

где  $|\Psi\rangle$  — вектор, заведомо не являющийся собственным вектором операторов  $\hat{H}$  и  $\hat{N}$ , зато удовлетворяющий условиям (4.6,б—д). Заметим, что поскольку теперь число пар флуктуирует около значения  $\langle N \rangle$ , использование для нахождения зависимости  $\bar{N}(|\vec{V}|)$  процедуры минимизации полной энергии приобретает смысл.

Попробуем обосновать введение флуктуирующих величин энергии и числа частиц (удобства ради не будем сейчас говорить о парах).

Согласно принципам квантовой теории, это величины, усредненные по бесконечно большому промежутку времени.

Выделим внутри вещества область пространства определенной формы и объема. Если частицы вещества взаимодействуют друг с другом (не просто обмениваются динамическими переменными), то скорость каждой из них непременно меняется как по величине, так и по направлению. Поэтому частицы будут достаточно часто пересекать поверхность выделенной области пространства, то вылетая наружу, то влетая внутрь. Естественно, что число частиц внутри вы-

деленной области будет флуктуировать во времени. Столь же естественно, что будет флуктуировать и содержащаяся в упомянутой области энергия.

Однако, если все области пространства находятся в равновесии друг с другом, можно полагать, что среднее по времени число частиц в равных объемах одинаковое, а сильные отклонения от среднего очень редки. Тогда невелико и среднее по времени значение этого отклонения.

В заключение отметим, что отказавшись от вектора  $|\Psi\rangle$  в виде (4.4) и заменив уравнение (4.6,а) на (4.35), мы убираем из системы (4.6) все камни преткновения. Осталось теперь найти новый вектор состояния.

## §4.9. Конструирование нового вектора состояния

### 4.9.1. Критерии качества "конструкции"

Сконструировать вектор  $|\Psi\rangle$ , удовлетворяющий условиям (4.6,б—д), нетрудно, но каким должны быть критерии качества конструкции?

Можно предложить следующее решение этого вопроса.

Пусть до включения взаимодействия коллектив состоял из вполне определенного числа  $N_0$  свободных частиц. Поскольку включение взаимодействия на самом деле не может изменить это число, потребуем в качестве критерия корректного вида вектора  $|\Psi\rangle$  следующее неравенство:

$$\left| \frac{\langle N \rangle - N_0}{N_0} \right| \ll 1$$

или равносильное ему

$$\left| \frac{\langle N \rangle - N_0}{\langle N \rangle} \right| \ll 1.$$

Значительное различие между  $\langle N \rangle$  и  $N_0$  будет свидетельствовать о физически нереальном распределении частиц по состояниям.

В связи с тем, что упомянутое различие очень сильно зависит от числа состояний, заметим, что возможное различие будет наименьшим, если привлечь их бесконечное число. Последнее легко сделать даже в случае ограниченного объема "пространства"  $\vec{V}$ -состояний.

Например, в объеме металла  $v$  и в интервале фермиевских состояний их число равно

$$N_{\text{состояний}} = v \cdot \int_{F - \hbar \omega_D}^{F + \hbar \omega_D} G_E(E) \cdot dE \approx v \cdot 2 \hbar \omega_D \cdot G_E(F).$$

Очевидно, что  $\lim_{v \rightarrow \infty} N_{\text{состояний}} = \infty$ .

Итак, учитывая, что

$$\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle \equiv \langle N \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i,$$

критерием корректности вида вектора  $|\Psi\rangle$  будем считать неравенство

$$\frac{\left| \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i \right) - n_0 \right|}{\lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i \right)} \ll 1$$

или

$$\frac{\left| \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i \right) - n_0 \right|}{n_0} \ll 1, \quad (4.36)$$

где  $n_0$  — истинная объемная концентрация частиц, равная  $\frac{N_0}{v}$ .

Однако прежде, чем пускать в ход критерий (4.36), необходимо убедиться в том, что используемый вектор  $|\Psi\rangle$  не приводит к слишком сильным колебаниям числа частиц около среднего значения. Нужно убедиться в том, что

$$\frac{\langle N \rangle^2 - \langle N^2 \rangle}{\langle N \rangle^2} \ll 1. \quad 1)$$

1) Неравенство, традиционно используемое в качестве критерия малости флуктуаций около средней величины. Оно означает, что среднеквадратичное отклонение от среднего значения квадрата величины мало.

Используя величины  $\tilde{N}_i$  для вычисления  $\langle N \rangle$  и  $\langle N^2 \rangle$ ,<sup>1)</sup> получим еще один критерий корректного вида вектора  $|\Psi\rangle$

$$\frac{\left| \left( \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{N}_i \cdot \tilde{N}_j \right|}{\left( \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i \right)^2} \ll 1. \quad (4.37)$$

Теперь перейдем непосредственно к конструированию. Есть два способа, позволяющих установить вид вектора  $|\Psi\rangle$ .

#### 4.9.2. Наглядный способ конструирования

1. Пусть состояние всего одно. Тогда участие пары (конечно, одной) во взаимодействии состоит в том, что она то возникает, то вообще пропадает. Решение уравнения (4.6,в) с условиями (4.6,б,д) выглядит так:

$$|\Psi\rangle = \left( \sqrt{1 - \tilde{N}_i} + \sqrt{\tilde{N}_i} b_i^\dagger \right) |0\rangle,$$

причем сразу видно, что первое слагаемое в круглой скобке подобрано для нормировки  $|\Psi\rangle$  на 1. Проверка дает:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = (1 - \tilde{N}_i) + \tilde{N}_i = 1;$$

$$\langle \Psi | c_i^\dagger c_i | \Psi \rangle = \langle \Psi | c_i^\dagger c_i c_{-i}^\dagger c_{-i} | \Psi \rangle = \langle \Psi | b_i^\dagger b_i | \Psi \rangle = \tilde{N}_i.$$

Очевидно, что

$$0 < \tilde{N}_i < 1.$$

2. Пусть состояний два ( $i$  и  $j$ ). Потребуем, чтобы

$$\langle \Psi | b_i^\dagger b_i | \Psi \rangle = \tilde{N}_i, \quad (4.38,а)$$

$$\langle \Psi | b_j^\dagger b_j | \Psi \rangle = \tilde{N}_j, \quad (4.38,б)$$

$$\langle \Psi | b_i^\dagger b_i b_j^\dagger b_j | \Psi \rangle = \tilde{N}_i \cdot \tilde{N}_j, \quad (4.38,в)$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1. \quad (4.38,г)$$

<sup>1)</sup> При вычислении величины  $\langle N^2 \rangle$  используют единичный оператор  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ .

Решение системы (4.38) напишем, опираясь на метод математической индукции:

$$|\Psi\rangle = (A_{ij} + B_i b_i^+ + D_j b_j^+ + F_{ij} b_i^+ b_j^+) |0\rangle. \quad (4.39)$$

Требования (4.38) приводят к четырем уравнениям:

$$B_i^2 + F_{ij}^2 = \tilde{N}_i; \quad D_j^2 + F_{ij}^2 = \tilde{N}_j; \quad F_{ij}^2 = \tilde{N}_i \cdot \tilde{N}_j; \quad A_{ij}^2 = (1 - \tilde{N}_i) \cdot (1 - \tilde{N}_j),$$

из которых очень легко найти величины  $A_{ij}$ ,  $B_i$ ,  $D_j$ ,  $F_{ij}$  (правда, с точностью до знака). В результате получаем (например):

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \left\{ \left( \sqrt{1 - \tilde{N}_i} + \sqrt{\tilde{N}_i} b_i^+ \right) \cdot \left( \sqrt{1 - \tilde{N}_j} + \sqrt{\tilde{N}_j} b_j^+ \right) \right\} |0\rangle = \\ &= \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ \nu_y \geq 0}}^2 \left( \sqrt{1 - \tilde{N}_i} + \sqrt{\tilde{N}_i} b_i^+ \right) \right\} |0\rangle. \end{aligned}$$

3. Для бесконечно большого числа состояний, пользуясь методом полной математической индукции, получаем:

$$|\Psi\rangle = \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ \nu_y \geq 0}}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \tilde{N}_i} + \sqrt{\tilde{N}_i} b_i^+ \right) \right\} |0\rangle, \quad (4.40)$$

причем

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1, \quad \langle \Psi | b_i^+ b_i | \Psi \rangle = \langle \Psi | c_i^+ c_i | \Psi \rangle = \tilde{N}_i,$$

$$0 < \tilde{N}_i < 1, \quad \langle \Psi | b_i^+ b_i b_j^+ b_j \dots | \Psi \rangle = \tilde{N}_i \cdot \tilde{N}_j \cdot \dots$$

Вектор (4.40) совпадает со знаменитым вектором состояния, фигурирующим в пионерской работе БКШ, посвященной сверхпроводимости<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Общепринятая аббревиатура: Бардин, Купер, Шриффер. Вектор состояния в пионерской статье БКШ был, однако, постулирован.



### 4.9.3. Формальный способ конструирования

Так как существует полная ортонормированная система собственных векторов оператора  $\hat{N}$ , любой вектор можно выразить в виде их линейной комбинации. Поскольку интересующий нас вектор не должен быть собственным — оператора  $\hat{N}$ , мы можем построить наиболее общий вектор  $|\Psi\rangle$ , требуя, чтобы он представлял собой суперпозицию всех векторов, описывающих любое целое число пар частиц:

$$|\Psi\rangle = B_0|0\rangle + B_1|1\rangle + B_2|2\rangle + \dots + B_\infty|\infty\rangle. \quad (4.41)$$

Здесь  $|N\rangle$  — вектор, описывающий коллектив из  $N$  пар частиц, которые, конечно, в каких-нибудь  $N$  состояниях (из бесконечно большого их числа) да находятся.

Выражение (4.41) должно быть таково, чтобы:

а)  $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = \dots = 1$ ;  $\langle \Psi|\Psi\rangle = 1$ ;

б) величина  $B_N^2$  — оказалась вероятностью того, что число гар частиц (составляющих коллектив бесконечно большого числа пар, распределенных по бесконечно большому числу спаренных числу состояний) равно  $N$ , и потому

$$\sum_{N=0}^{\infty} B_N^2 = 1.$$

Теперь нужно решить вопрос, как должен выглядеть вектор  $|\Psi\rangle$ , чтобы он содержал информацию о величинах  $\tilde{N}_i$ .

Это уже нетрудно сделать. Собственными векторами оператора  $\hat{N}$ , образующими полную ортонормированную систему, являются:

$$|0\rangle; c_i^+|0\rangle; c_i^+c_j^+|0\rangle; \dots$$

Обратимся, например, к вектору

$$|1_i\rangle \equiv \left\{ \left( \frac{\tilde{N}_i}{1 - \tilde{N}_i} \right)^{1/2} \cdot \left( \prod_{\substack{i=1 \\ \nu_i \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_i)^{1/2} \right) \right\} c_i^+|0\rangle,$$

описывающему “коллектив”, состоящий из одной пары, притом находящейся именно в  $i$ -м состоянии. Этот вектор, конечно, тоже яв-

ляется собственным оператором  $\hat{N}$ , так как он получен просто умножением вектора  $c_i^+ |0\rangle$  на число. Число это специально подобрано так, чтобы норма вектора  $|1_i\rangle$  представляла собой вероятность того, что в  $i$ -м состоянии пара находится, а в тот же момент времени все остальные состояния пусты:

$$\langle 1_i | 1_i \rangle = \bar{N}_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} (1 - \bar{N}_j) = \left( \frac{\bar{N}_i}{1 - \bar{N}_i} \right) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (1 - \bar{N}_j).$$

В таком случае вектор, описывающий “коллектив”, состоящий из одной пары, находящейся не именно в  $i$ -м, а просто в каком-то из множества состояний — обозначим этот вектор символом  $|1'\rangle$  — должен быть суперпозицией векторов  $|1_i\rangle$ :

$$\begin{aligned} |1'\rangle &= \left[ \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\bar{N}_i}{1 - \bar{N}_i} \right)^{1/2} \cdot \left( \prod_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (1 - \bar{N}_j)^{1/2} \right) c_i^+ \right\} \right] |0\rangle = \\ &= \left[ \prod_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (1 - \bar{N}_j)^{1/2} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \left( \frac{\bar{N}_i}{1 - \bar{N}_i} \right)^{1/2} c_i^+ \right] |0\rangle. \end{aligned}$$

Разумеется, если потребовать равенства  $\langle 1' | 1' \rangle = 1$ , это будет равносильно признанию, что никаких других ситуаций, кроме как существования точно одной пары в пространстве спаренных состояний не может быть.

Поэтому, оглядываясь на выражение (4.41), целесообразно отказаться от требования  $\langle 1' | 1' \rangle = 1$  и сразу же представить  $|1'\rangle$  в виде

$$|1'\rangle = \left[ \prod_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (1 - \bar{N}_j)^{1/2} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \left( \frac{\bar{N}_i}{1 - \bar{N}_i} \right)^{1/2} c_i^+ \right] \equiv B_1 |1\rangle, \quad (4.42, a)$$

после чего в согласии с (4.41):

$$B_1^2 = \prod_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_i) \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \frac{\tilde{N}_i}{1 - \tilde{N}_i},$$

причем

$$B_1^2 < 1.$$

Вектором, описывающим нульчастичный “коллектив”, может быть только вектор  $|0\rangle$ . Однако в “смесь ситуаций” с любым числом частиц нульчастичный вектор обязан входить с “весом”, меньшим 1.

Поскольку вероятность ( $B_1^2$ ) того, что в любой момент времени ни в одном из состояний нет пар, равна

$$\prod_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_i),$$

естественно положить

$$B_0|0\rangle = \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_i)^{1/2} \right\} |0\rangle. \quad (4.42,6)$$

Далее по аналогии получим:

$$B_2|2\rangle = \left\{ \prod_{\substack{k=1 \\ V_k \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_k)^{1/2} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \left( \frac{\tilde{N}_j}{1 - \tilde{N}_j} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{\tilde{N}_i}{1 - \tilde{N}_i} \right)^{1/2} b_j^+ b_i^+ \right\} |0\rangle, \quad (4.42,в)$$

причем

$$B_2^2 = \prod_{\substack{k=1 \\ V_k \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_k) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \frac{\tilde{N}_j}{1 - \tilde{N}_j} \cdot \frac{\tilde{N}_i}{1 - \tilde{N}_i},$$

и т.п.

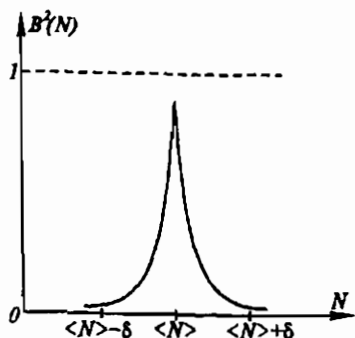


Рис. 4.4. Пример зависимости  $B^2$  от  $N$ . Дискретное множество  $N$  заменено для наглядности непрерывными. В этом слу-

чае:  $\int_0^{\infty} B^2(N) dN = 1.$

$$B_{\infty} | \infty \rangle = \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \dots \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \dots \tilde{N}_i^{1/2} \dots \tilde{N}_s^{1/2} \dots b_i^+ \dots b_s^+ \dots \right\} | 0 \rangle, \quad (4.42, \infty)$$

бесконечно большое число сумм
бесконечно большое число сомножителей
бесконечно большое число сомножителей

причем

$$B_{\infty}^2 = \prod_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i.$$

Присутствие множителя  $\prod_{\substack{k=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_k)^{1/2}$  обеспечивает условие

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} B_N^2 &= \prod_{\substack{k=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_k) + \left( \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_k) \right) + \dots + \prod_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_j = \\ &= \prod_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \left[ (1 - \tilde{N}_i) + \tilde{N}_i \right] = 1. \end{aligned}$$

Подставив семейство (4.42) в (4.41), получим

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle = & \left\{ \prod_{\substack{k=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_k)^{1/2} + \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_k)^{1/2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i^{1/2} b_i^+ + \right. \\
 & \left. + \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (1 - \tilde{N}_k)^{1/2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0 \\ j \neq i}}^{\infty} \tilde{N}_i^{1/2} \tilde{N}_j^{1/2} b_i^+ b_j^+ + \dots \right\} |0\rangle = \\
 & = \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \tilde{N}_i} + \sqrt{\tilde{N}_i} b_i^+ \right) \right\} |0\rangle.
 \end{aligned}$$

Конечно, мы пришли к ожидаемому результату (см. формулу (4.40)). Тем не менее представление (4.41) обладает самостоятельной ценностью. Допустим, что  $B_N^2$  зависит от  $N$ , причем так, как показано на рис. 4.4. Естественно, что максимуму  $B_N^2$  отвечает наимвероятнейшее число, которое мы обозначим  $\langle N \rangle$  и которое, по определению, равно:

$$\langle N \rangle \equiv \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot B_N^2.$$

В качестве “полуширины” пика (по оси  $N$ ) возьмем общепринятую величину

$$\delta \equiv \sqrt{|\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2|}.$$

Если  $\frac{\delta}{\langle N \rangle} \ll 1$ , то:

$$B^2(N < [\langle N \rangle - \delta]) \ll B^2(N = \langle N \rangle),$$

$$B^2(N > [\langle N \rangle + \delta]) \ll B^2(N = \langle N \rangle).$$

Это значит, что очень маловероятно отклонение числа пар от значения  $\langle N \rangle$  на величину, большую, чем  $\delta$  — ничтожную долю от  $\langle N \rangle$ .

## Глава 5. СОСТОЯНИЯ КОЛЛЕКТИВА ЭЛЕКТРОНОВ СВЕРХПРОВОДНИКА

### §5.1. Коллектив сверхпроводящих (взаимодействующих друг с другом) электронов

#### 5.1.1. Постановка задачи

В гл. 4 был разработан способ описания коллектива пар частиц, образующих тот связанный воедино коллектив, “облик” которого был представлен на рис. 1.22 и 2.8.

Учитывая, что вся подготовительная работа уже была проделана в гл. 4, сформулируем стоящую перед нами задачу — дать само описание — следующим образом.

1. На первом этапе установить вид зависимости  $\bar{N}(|\vec{V}|)$ , используя выражение (4.35) для полной энергии ( $E_{в.э.}$ ) коллектива бесконечно большого числа взаимодействующих (друг с другом) электронов и затем минимизируя эту энергию при соблюдении определенного дополнительного условия.

Согласно сказанному в §4.8, выражение для энергии должно иметь вид:

$$E_{в.э.} = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle,$$

где

$$|\Psi\rangle = \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \bar{N}_i} + \sqrt{\bar{N}_i} b_i^+ \right) \right\} |0\rangle, \quad (5.1,a)$$

$$\langle \Psi | = \langle 0 | \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \bar{N}_i} + \sqrt{\bar{N}_i} b_i^+ \right) \right\}. \quad (5.1,b)$$

Что же касается оператора  $\hat{H}$ , то уже было решено оставить в нем лишь ту часть, которая действует на вектор и со-вектор, имеющие

вид (5.1):

$$\hat{H} = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} E_i b_i^{\dagger} b_i + \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0 \\ j \neq i}}^{\infty} U_{ij} b_i^{\dagger} b_j. \quad (5.2)$$

Таким образом

$$E_{\text{в.э.}} = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} E_i \cdot \bar{N}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0 \\ j \neq i}}^{\infty} U_{ij} \sqrt{\bar{N}_i \cdot (1 - \bar{N}_i) \cdot \bar{N}_j \cdot (1 - \bar{N}_j)}. \quad (5.3)$$

В качестве дополнительного условия примем, согласно сказанному в §2.4, равенство:

$$\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle = N_{\text{ист}}, \quad (5.4)$$

где  $N_{\text{ист}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (n_0 \cdot \nu)$  — истинное (нефлуктуирующее) число электронов в образце бесконечно большого объема, а  $n_0$  — концентрация свободных электронов проводимости, равная

$$n_0 = \int_0^F G_E(E) \cdot dE,$$

где  $G_E(E) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot \frac{m^{3/2} E^{1/2}}{\hbar^3}$  — плотность одночастичных состояний;

$F$  — уровень Ферми при  $T=0$ ;

$\hat{N} = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} b_i^{\dagger} b_i = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} c_i^{\dagger} c_i$  — оператор числа электронов, подстановка которого в уравнение (5.4) преобразует последнее к виду

$$\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \bar{N}_i = N_{\text{ист}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (n_0 \cdot \nu), \quad (5.5, a)$$

или к виду

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\nu} \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i \right) = n_0. \quad (5.5,6)$$

Заметим, что возникшее равенство

$$\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i,$$

в котором слева — квантово усредненная величина, а справа — средняя по времени (см. §2.4), полностью согласуется с эргодической гипотезой.

2. На втором этапе необходимо проверить, согласуется ли найденная зависимость  $\tilde{N}(|\vec{V}|)$  (или  $\tilde{N}(E)$ ) с критериями: правильности выбранного вида вектора  $|\Psi\rangle$ ; возможности существования связанного коллектива электронов.

Критериев правильного выбора вида вектора  $|\Psi\rangle$  два.

Первым является неравенство

$$\frac{\sqrt{|\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle|^2 - \langle \Psi | \hat{N}^2 | \Psi \rangle|}}{\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle} \ll 1, \quad (5.6)$$

которое, как указывалось в §4.9, удостоверяет, что среднее значение флуктуации числа электронов в образце бесконечно большого объема очень мало.

Вторым критерием является неравенство

$$\frac{\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\nu} \langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle \right) - n_0}{n_0} \ll 1, \quad (5.7)$$

которое удостоверяет, что отличие среднего (по времени) значения концентрации электронов от истинного очень мало.

Критерий

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\nu} \cdot (E_{\text{с.э.}} - E_{\text{в.э.}}) \right\} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta E}{\nu} \right) > 0 \quad (5.8)$$

удостоверяет, что в пересчете на единицу объема полная энергия коллектива свободных электронов (совпадающая с их кинетической



энергией) на конечную величину больше полной энергии коллектива того же числа электронов, вступивших во взаимодействие друг с другом.

3. Наконец, на третьем этапе необходимо вычислить полную энергию такого коллектива бесконечно большого числа взаимодействующих друг с другом электронов, из которого “вырваны” и “превращены” в способные участвовать во взаимодействии только с неким телом, но не друг с другом и со всеми остальными всего лишь два электрона<sup>1)</sup>.

Далее необходимо будет проверить, действительно ли для этого потребуется перестройка всего коллектива<sup>2)</sup>. Доказательством того, что это так, послужило бы изменение полной энергии на конечную величину

$$E_{\text{в.з.}}^{\text{возбужд}} - E_{\text{в.з.}} = \Delta E > 0. \quad (5.9)$$

Приступим теперь к решению поставленной задачи.

### 5.1.2. Установление вида зависимости $\tilde{N}(E)$

Используя неопределенный множитель  $L$  (Лангранжа), минимизируем величину

$$E_0 = E_{\text{в.з.}} - L \cdot \left[ 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \tilde{N}_i \right] - N_{\text{ист}} = L \cdot N_{\text{ист}} + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} (E_i - L) \cdot \tilde{N}_i + \\ + \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ V_y \geq 0 \\ j \neq i}}^{\infty} U_{ij} \cdot \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i) \cdot \tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j)}. \quad (5.10)$$

1) В п. 5.5.4 будет доказано, что такие два электрона ни в малейшей степени не могут уподобляться свободным электронам зоны проводимости нормального металла. Именно поэтому здесь подчеркивается, что “вырванные” электроны продолжают участвовать во взаимодействии, но только не друг с другом и не с остальными, связанными в коллектив.

2) Подчеркнем, что на первый взгляд это может показаться удивительным: ведь в коллективе, состоящем из бесконечно большого числа частиц, свое состояние изменили всего две.

Условия  $\frac{dE_n}{d\tilde{N}_i}$  позволяют найти ту совокупность  $\tilde{N}_i$ , которой отвечает наименьшее значение  $E_{в.э.}$ . Дифференцируя уравнение (5.10) по  $\tilde{N}_i$ , получаем:

$$\frac{dE_n}{d\tilde{N}_i} = 2(E_i - L) + 2 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \tilde{N}_i}{2 \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \sqrt{\tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j)} = 0. \quad (5.11)$$

Введем обозначение

$$- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \sqrt{\tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j)} \equiv \Delta_i, \quad (5.12)$$

подчеркивая с помощью индекса  $i$  при  $\Delta$ , что сумма

$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \sqrt{\tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j)}$  зависит от того, какое слагаемое исключено.

Используя (5.12), преобразуем (5.11) к виду

$$\frac{\Delta_i}{2(E_i - L)} \cdot (1 - 2\tilde{N}_i) = \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)}.$$

Решение этого уравнения с неизвестным  $\tilde{N}_i$ :

$$\tilde{N}_i = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{E_i - L}{|\sqrt{\Delta_i^2 + (E_i - L)^2}|} \right).$$

Физически содержательное понятие о степени заполнения одного состояния частицами, коллектив которых находится в равновесии

с внешней средой, совместимо только с выражением

$$\tilde{N}_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E_i - L}{|\Delta_i^2 + (E_i - L)^2|} \right). \quad (5.13)$$

Перепишем (5.12), используя (5.13):

$$\Delta_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \sqrt{\tilde{N}_j} \cdot (1 - \tilde{N}_j) = - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \frac{U_{ij} \cdot \Delta_j}{\sqrt{\Delta_j^2 + (E_j - L)^2}}. \quad (5.14)$$

Если "потенциал"  $U_{ij}$  допускает представление в виде

$$U_{ij} = u_i \cdot u_j, \quad (5.14)$$

то соотношение (5.13) в свою очередь представимо в виде

$$2\Delta_i = - u_i \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \frac{u_j \cdot \Delta_j}{\sqrt{\Delta_j^2 + (E_j - L)^2}}. \quad (5.15)$$

Теперь подчеркнем, что если  $(u_j \cdot \Delta_j)$  все одного знака, то

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \frac{u_j \cdot \Delta_j}{\sqrt{\Delta_j^2 + (E_j - L)^2}} \gg \frac{u_k \cdot \Delta_k}{\sqrt{\Delta_k^2 + (E_k - L)^2}}$$

для любого  $k$ . И если мы выдвинем помимо (5.14) еще одно предположение, что все  $(u_j \cdot \Delta_j)$  одного знака, то

$$2\Delta_i \approx - u_i \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \frac{u_j \cdot \Delta_j}{\sqrt{\Delta_j^2 + (E_j - L)^2}} + \left( \frac{u_i \cdot \Delta_i}{\sqrt{\Delta_i^2 + (E_i - L)^2}} \right) \right] =$$

1) В равновесных условиях чем больше энергия, отвечающая состоянию, тем меньше степень заполнения этого состояния. Далее повсюду снимем знак модуля, подразумевая только положительное значение корня.

$$= -u_i \sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \frac{u_j \cdot \Delta_j}{\sqrt{\Delta_j^2 + (E_j - L)^2}}. \quad (5.16)$$

Выражение (5.16), в котором фигурирует сумма уже по всем  $j$ , позволяет переопределить (“задним числом”) величину  $\Delta_i$ , а именно (возвращаясь к (5.12)) написать:

$$\Delta_i \equiv -u_i \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} u_j \cdot \sqrt{\bar{N}_j \cdot (1 - \bar{N}_j)},$$

где справа — также сумма по всем  $j$ . Однако эта последняя уже не является функцией  $i$ :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} u_j \cdot \sqrt{\bar{N}_j \cdot (1 - \bar{N}_j)} = \text{const.}$$

Тогда

$$\Delta_i = -u_i \cdot \text{const}; \quad \Delta_j = -u_j \cdot \text{const}; \quad \text{и т.д.} \quad (5.17)$$

Подставляя (5.17) в (5.16), получим

$$-2 \cdot u_i \cdot \text{const} = -u_i \sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \frac{u_j \cdot (-u_j \cdot \text{const})}{\sqrt{\Delta_j^2 + (E_j - L)^2}},$$

откуда вытекает, что

$$\sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \frac{u_j^2}{\sqrt{\Delta_j^2 + (E_j - L)^2}} = -2. \quad (5.18)$$

Это выражение следует рассматривать как уравнение с неизвестным  $\Delta_j$ .

Допустим, простоты ради, что

$$u_j^2 = \begin{cases} -U_0 & \text{при } (F - \hbar \cdot \omega_D) \leq E_j \leq (F + \hbar \cdot \omega_D), \\ 0 & \text{при } E_j < (F - \hbar \cdot \omega_D), E_j > (F + \hbar \cdot \omega_D), \end{cases}$$

где знак “минус” учитывает, что взаимодействие между всеми электронами (и, автоматически, между всеми электронными парами) носит характер притяжения. Тогда, поскольку, согласно (5.17),

$$\Delta_i = \Delta_j = \dots \equiv \Delta,$$

уравнение (5.18) принимает вид

$$\sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + (E_j - L)^2}} = \frac{2}{U_0} \quad (U_0 > 0). \quad (5.19)$$

Прежде, чем решать это уравнение, присмотримся к множителю Лагранжа  $L$ . На рис. 5.1 представлены зависимости

$$\tilde{N}(E) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E - L}{\sqrt{\Delta^2 + (E - L)^2}} \right)$$

отвечающие разным  $L$ .

На рис. 5.1 функция  $\tilde{N}(E)$  изображена плавной кривой, что отвечает традиционному предположению о ничтожной разности “соседних” значений энергии в пределах одной разрешенной зоны (проводимости) металла.

Вспомним также, что в §2.8 была обоснована необходимость распространить действие гипотетического механизма восстановления корреляции скоростей электронов-партнеров<sup>1)</sup> на интервал энергий от  $(F - \hbar \cdot \omega_D)$  до  $(F + \hbar \cdot \omega_D)$ . В связи с этим обратимся к критерию (5.7) и представим его в виде

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{v} \cdot \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \right) = n_0. \quad 2)$$

1) Он же — механизм взаимодействия между электронами.

2) Если приравнять величину  $\lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{v} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \right)$  величине  $n_0$ , критерий (5.7) будет выглядеть наилучшим образом.

Левую часть этого равенства представим в виде

$$\int_0^{F+\hbar\omega_D} G_E(E) \cdot \tilde{N}(E) \cdot dE = \int_0^{F-\hbar\omega_D} G(E) \cdot 1 \cdot dE + \int_{F-\hbar\omega_D}^{F+\hbar\omega_D} G_E(E) \cdot \tilde{N}(E) \cdot dE,$$

а правую часть — в виде

$$\int_0^F G_E(E) \cdot 1 \cdot dE = \int_0^{F-\hbar\omega_D} G_E(E) \cdot 1 \cdot dE + \int_{F-\hbar\omega_D}^F G_E(E) \cdot 1 \cdot dE.$$

Далее снимем ради упрощения индекс “E” с величины  $G_E(E)$ .

Допустимо считать, что в интервале  $(F-\hbar\omega_D) \leq E \leq (F+\hbar\omega_D)$  величина  $G(E) = G(F)$ . Тогда

$$\int_{F-\hbar\omega_D}^{F+\hbar\omega_D} \tilde{N}(E) \cdot dE = \hbar \cdot \omega_D.$$

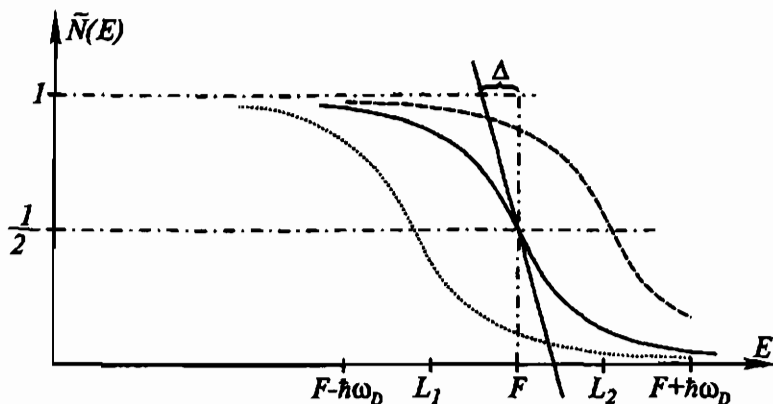


Рис. 5.1. Три варианта зависимости  $\tilde{N}(E)$ , отличающиеся положением величины  $L$  на оси  $E$ .

Только при  $L = F$ :

$$\int_{F-\hbar\omega_D}^{F+\hbar\omega_D} \tilde{N}(E) \cdot dE = \hbar \cdot \omega_D$$

Это означает, что площадь под ступенчатой прямой в интервале  $(F - \hbar \omega_D) \leq E \leq F$  должна быть равна площади под плавной кривой в интервале  $(F - \hbar \omega_D) \leq E \leq (F + \hbar \omega_D)$ . Видно, что совпадение площадей возможно лишь, если  $L = F$ . Поэтому примем равенство:

$$\bar{N}(E) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E - F}{\sqrt{\Delta^2 + (E - F)^2}} \right). \quad (5.20)$$

Теперь решим уравнение (5.19), положив

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ \nu_j \geq 0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + (E_j - F)^2}} &= \nu \cdot \int_{F - \hbar \omega_D}^{F + \hbar \omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + (E - F)^2}} \cdot \frac{1}{2} G(E) \cdot dE = \\ &\approx \frac{\nu \cdot G(F)}{2} \cdot \int_{F - \hbar \omega_D}^{F + \hbar \omega_D} \frac{dE}{\sqrt{\Delta^2 + (E - F)^2}}. \end{aligned}$$

(Напомним, что сумма по  $i$  — это сумма по  $\vec{V}$ -полупространству, отсюда и множитель  $\frac{1}{2}$  при  $G(E)$ ).

Решение представим в виде

$$\frac{4}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)} = \ln \left| \frac{\sqrt{\hbar^2 \cdot \omega_D^2 + \Delta^2} + \hbar \cdot \omega_D}{\sqrt{\hbar^2 \cdot \omega_D^2 + \Delta^2} - \hbar \cdot \omega_D} \right|. \quad (5.21)$$

Разрешим уравнение (5.21) относительно  $\Delta$ :

$$\Delta = 2\hbar \cdot \omega_D \cdot \frac{\exp \left( \frac{4}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)} \right)}{\exp \left( \frac{4}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)} \right) - 1}. \quad (5.22)$$

В случае  $U_0 \cdot \nu \cdot G(F) \ll 4$ :

$$\Delta \approx 2\hbar \cdot \omega_D \cdot \exp \left( -\frac{2}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)} \right). \quad (5.23)$$

Проверим теперь, удовлетворяется ли критерий (5.6) малости флуктуаций числа электронов около величины  $\langle N \rangle$ . Вычислим величины  $(\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle)^2$  и  $(\langle \Psi | \hat{N}^2 | \Psi \rangle)$ :

$$(\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle)^2 = \left( 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i \right)^2;$$

$$\langle \Psi | \hat{N}^2 | \Psi \rangle = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{N}_i \cdot \tilde{N}_j + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)$$

(в обоих выражениях суммирование распространяется на  $\vec{V}$ -полупространство).

Получаем:

$$\frac{\sqrt{|\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle^2 - \langle \Psi | \hat{N}^2 | \Psi \rangle|}}{\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle} \equiv \delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)}{\left( \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i \right)^2}}.$$

Чтобы сделать выкладки менее громоздкими, вычислим вместо  $\delta$  величину  $\delta^2$ . Подставим в качестве  $\tilde{N}_i$  выражение (5.20) и, перейдя от суммирования к интегрированию, получаем

$$\delta^2 = \frac{\frac{1}{4} \cdot v \cdot \int_{F - \hbar \omega_D}^{F + \hbar \omega_D} \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + (E - F)^2} \cdot \frac{1}{2} G(E) \cdot dE}{\left( v \cdot \int_{F - \hbar \omega_D}^{F + \hbar \omega_D} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{E - F}{\sqrt{\Delta^2 + (E - F)^2}} \right] \cdot \frac{1}{2} G(E) \cdot dE \right)^2} =$$

$$\approx \frac{\frac{1}{8} v \cdot G(F) \cdot \Delta \cdot \varphi(\Delta)}{\left( \frac{1}{4} \cdot v \cdot G(F) \cdot \hbar \cdot \omega_D \right)^2} =$$



$$= 4 \frac{U_0}{\hbar \cdot \omega_D} \cdot \frac{\varphi(\Delta) \cdot \exp\left(\frac{2}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}\right)}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F) \cdot \left[\exp\left(\frac{4}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}\right) - 1\right]}.$$

Здесь обозначено:

$$\varphi(\Delta) \equiv \operatorname{arctg}\left(\frac{\hbar \cdot \omega_D}{\Delta}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\hbar \cdot \omega_D}{\Delta}\right).$$

На рис. 5.2 представлен график зависимости величины угла от его тангенса, из которого следует, что

$$\varphi(\Delta) = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\hbar \cdot \omega_D}{\Delta}\right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\exp\left(\frac{4}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}\right) - 1}{2 \exp\left(\frac{2}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}\right)}.$$

В двух крайних случаях:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{(U_0 \cdot \nu \cdot G(F)) \rightarrow \infty} & \left[ \frac{\varphi(\Delta) \cdot \exp\left(\frac{2}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}\right)}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F) \cdot \left[\exp\left(\frac{4}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}\right) - 1\right]} \right] = \\ & = \frac{1}{4} \lim_{(U_0 \cdot \nu \cdot G(F)) \rightarrow \infty} \varphi(\Delta) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{(U_0 \cdot \nu \cdot G(F)) \rightarrow 0} & \left[ \frac{\varphi(\Delta) \cdot \exp\left(\frac{2}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}\right)}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F) \cdot \left[\exp\left(\frac{4}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}\right) - 1\right]} \right] = \\ & = \lim_{(U_0 \cdot \nu \cdot G(F)) \rightarrow 0} \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{2}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}}\right) \times \left[ \frac{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}{2} \cdot e^{\frac{2}{U_0 \cdot \nu \cdot G(F)}} \right]^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Как видно, критерий (5.6) выполняется в обоих случаях. Он выполняется и при независимом условии  $\nu \rightarrow \infty$ , то есть для образца бесконечно большого размера.

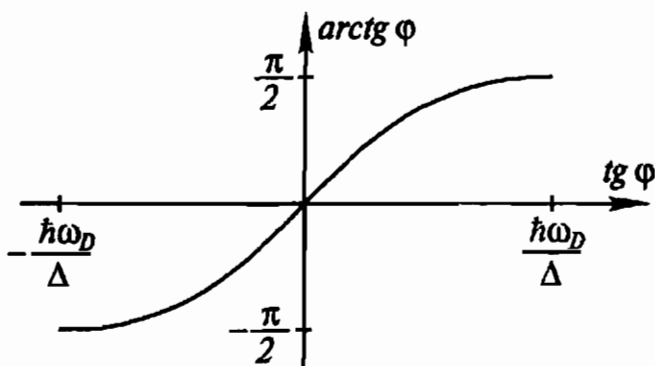


Рис. 5.2. Зависимость величины угла от его тангенса

### §5.2. Расчет энергии

Располагая физически обоснованной зависимостью  $\tilde{N}(E)$  для взаимодействующих электронов, можно вычислить величину  $E_{в.з.}$ :

$$E_{в.з.} = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} 2 E_i \cdot \tilde{N}_i + \\ + \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_y \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \sqrt{\tilde{N}_i \cdot \tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_i) \cdot (1 - \tilde{N}_j)}. \quad (5.24)$$

(здесь использованы выражения (5.1,а,б) для  $|\Psi\rangle$  и  $\langle\Psi|$  и (5.2) для  $\hat{H}$ ).

Воспользовавшись соотношением (5.13), упростим выражение для  $E_{в.з.}$ :

$$E_{в.з.} = \sum_{\substack{i=1 \\ V_y \geq 0}}^{\infty} \left[ 2 E_i \cdot \tilde{N}_i - \Delta_i \cdot \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)} \right]. \quad (5.25)$$

Далее используем те же предположения и приближения, которые были сделаны при расчете величины  $\bar{N}_i$ , и перейдем от суммирования к интегрированию (напомним — по  $\vec{V}$ -полупространству). В результате получим:

$$\begin{aligned}
 E_{в.з.} &= \nu \cdot \int_{F-\hbar\omega_D}^{F+\hbar\omega_D} 2E \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{E-F}{\sqrt{\Delta^2 + (E-F)^2}} \right) \cdot \frac{1}{2} G(E) \cdot dE - \\
 &\quad - \nu \cdot \Delta \cdot \int_{F-\hbar\omega_D}^{F+\hbar\omega_D} \frac{\Delta}{2\sqrt{\Delta^2 + (E-F)^2}} \cdot \frac{1}{2} G(E) \cdot dE = \\
 &= \frac{\nu \cdot G(E)}{4} \cdot \left\{ \left[ 4F \cdot \hbar\omega_D - 2\hbar^2\omega_D^2 \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{\hbar \cdot \omega_D} \right)^2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \Delta^2 \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{\hbar^2 \cdot \omega_D^2 + \Delta^2} + \hbar \cdot \omega_D}{\sqrt{\hbar^2 \cdot \omega_D^2 + \Delta^2} - \hbar \cdot \omega_D} \right| \right] - \Delta^2 \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{\hbar^2 \cdot \omega_D^2 + \Delta^2} + \hbar \cdot \omega_D}{\sqrt{\hbar^2 \cdot \omega_D^2 + \Delta^2} - \hbar \cdot \omega_D} \right| \right\} = \\
 &= \frac{\nu \cdot G(E)}{4} \cdot \left[ 4F \cdot \hbar\omega_D - 2\hbar^2\omega_D^2 \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{\hbar \cdot \omega_D} \right)^2} \right].
 \end{aligned}$$

Сравним эту величину энергии с соответствующей для свободных электронов. Чтобы число их было таким же, как взаимодействующих, ограничимся интервалом энергий свободных электронов от  $F - \hbar \cdot \omega_D$  до  $F$ , причем положим, что в этих пределах  $\bar{N}_{своб}(E, T=0) = 1$ . Тогда

$$E_{с.з.} = \nu \cdot \int_{F-\hbar\omega_D}^{F+\hbar\omega_D} E \cdot G(E) \cdot dE = \frac{\nu \cdot G(E)}{4} \cdot \left[ 4F \cdot \hbar\omega_D - 2\hbar^2\omega_D^2 \right].$$

Очевидно, что  $E_{в.з.} < E_{с.з.}$ . Для случая  $\Delta \ll \hbar \cdot \omega_D$  получаем

$$E_{с.з.} - E_{в.з.} = \frac{\nu \cdot G(F)}{4} \cdot \Delta^2.$$

Если учесть, что принцип запрета (Паули) позволяет поместить в одно  $\vec{V}$ -состояние два электрона с антипараллельными спинами<sup>1)</sup>, то плотность состояний нужно удвоить. Тогда

$$E_{с.э.} - E_{в.э.} = \frac{v \cdot G(E)}{2} \cdot \left[ 4 F \cdot \hbar \omega_D - 2 \hbar^2 \omega_D^2 \right] - \frac{v \cdot G(E)}{2} \times \\ \times \left[ 4 F \cdot \hbar \omega_D - 2 \hbar^2 \omega_D^2 \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{\hbar \cdot \omega_D} \right)^2} \right] = \frac{v \cdot G(E)}{2} \cdot \Delta^2. \quad (5.26)$$

Итак. Расчет закончен. Выяснилось, что существует такое состояние коллектива электронов, в котором все<sup>2)</sup> они взаимодействуют друг с другом при сохранении корреляции скоростей ( $\tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(-\vec{V}_i)$ ), которая распространяется именно на тот интервал  $\vec{V}$ -пространства, в котором только и могут находиться токнесущие состояния и в котором происходят “переходы” электронов под действием дефектов-рассеивателей. Кроме того (что не менее важно) оказалось, что средняя скорость каждого из взаимодействующих электронов (каждой из взаимодействующих пар) равна нулю в отсутствии внешнего возмущения.

Выяснилось также, что трех условий достаточно для существования подобного состояния коллектива: сколь угодно слабого притяжения между такими электронами, которые постоянно обладают равными и противоположно направленными скоростями; возможности представить “потенциал”  $U_{ij}$  в виде  $u_i \cdot u_j$ ; одинаковости знака  $u_i$  для всех  $i$ <sup>3)</sup>. Это те же самые условия, которых оказалось достаточно для возникновения одной куперовской пары.

1) В этом случае два электрона с антипараллельными спинами находятся как в состоянии  $\vec{V}_i$ , так и в состоянии  $(-\vec{V}_i)$ . Поэтому все рассуждения и аргументы, приведенные в предыдущих параграфах, остаются в силе.

2) Повсюду, где речь шла о всех электронах проводимости, конечно, имелись в виду все те, которые находятся в пределах интервала фермиевских состояний. Остальные нас, конечно, не интересуют, ибо не вносят никакого вклада ни в проводимость, ни в диамагнитную реакцию.

3) И одинаковости знака  $U_{ij}$  для всех  $i$  и  $j$ .

### §5.3. Возбужденные состояния коллектива

#### 5.3.1 Описание возбужденных состояний

Сначала докажем, что существует всего два типа возбужденных состояний. Согласно математической схеме квантовой теории, векторы, описывающие подобные состояния, должны удовлетворять двум условиям:

$$\langle \Psi | \Psi_{\text{возб}} \rangle = 0;$$

$$\langle \Psi_{\text{возб}} | \Psi_{\text{возб}} \rangle = 1,$$

где  $\langle \Psi |$  — со-вектор основного состояния.

Множество величин  $|\Psi_{\text{возб}}\rangle$  будем искать, опираясь на метод математической индукции. Именно, обратимся сначала к случаю всего одного спаренного состояния:

$$\langle \Psi | = \langle 0 | \left( \sqrt{1 - \bar{N}_i} + \sqrt{\bar{N}_i} c_{-i} c_i \right)$$

Тогда:

$$\langle \Psi | \Psi_{\text{возб}} \rangle = \sqrt{1 - \bar{N}_i} \langle 0 | \Psi_{\text{возб}} \rangle + \sqrt{\bar{N}_i} \langle 0 | c_{-i} c_i | \Psi_{\text{возб}} \rangle = 0. \quad (5.27)$$

Существуют два типа решений уравнения (5.27)

а) Решения типа I, которые приводят к равенствам

$$\langle 0 | \Psi_{\text{возб}} \rangle = 0, \quad \langle 0 | c_{-i} c_i | \Psi_{\text{возб}} \rangle = 0,$$

которым удовлетворяют векторы

$$|\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,1} = c_i^+ |0\rangle, \quad |\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,2} = c_{-i}^+ |0\rangle,$$

$$|\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_i^+ + c_{-i}^+) |0\rangle,$$

которым в свою очередь можно придать вид:

$$|\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,\mu} = \hat{A}_{\mu,i} |\Psi\rangle \quad (\mu = 1, 2, 3),$$

где

$$\begin{aligned}\hat{A}_{1,i} &= \sqrt{1 - \bar{N}_i} c_i^+ - \sqrt{\bar{N}_i} c_{-i}, \\ \hat{A}_{2,i} &= \sqrt{1 - \bar{N}_i} c_{-i}^+ + \sqrt{\bar{N}_i} c_i, \\ \hat{A}_{3,i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[ \sqrt{1 - \bar{N}_i} (c_i^+ + c_{-i}^+) + \sqrt{\bar{N}_i} (c_i - c_{-i}) \right].\end{aligned}$$

Заметим, что

$${}_{1,\mu} \langle \Psi_{\text{возб}} | \Psi_{\text{возб}} \rangle_{1,\mu} = 1.$$

Таким образом, (найденный по индукции) вектор

$$\begin{aligned}|\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,1} &= \hat{A}_{1,i} \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \bar{N}_j} + \sqrt{\bar{N}_j} c_j^+ c_{-j}^+ \right) \right\} |0\rangle = \\ &= \left\{ c_i^+ \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \bar{N}_j} + \sqrt{\bar{N}_j} c_j^+ c_{-j}^+ \right) \right\} |0\rangle\end{aligned}$$

описывает такое возбужденное состояние коллектива, в котором степень заполнения именно  $i$ -го состояния точно равна 1, а именно  $(-i)$ -го состояния точно равно 0:

$${}_{1,1} \langle \Psi_{\text{возб}} | c_i^+ c_i | \Psi_{\text{возб}} \rangle_{1,1} = 1,$$

$${}_{1,1} \langle \Psi_{\text{возб}} | c_{-i}^+ c_{-i} | \Psi_{\text{возб}} \rangle_{1,1} = 0.$$

Это означает, что в  $i$ -м одночастичном состоянии находится свободный электрон, а  $i$ -е спаренное состояние исключается вообще из интервала, соответствующего взаимодействующим частицам.

Аналогичное относится и к вектору

$$|\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,2} = \hat{A}_{2,i} |\Psi\rangle = \left\{ c_{-i}^+ \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \bar{N}_j} + \sqrt{\bar{N}_j} c_j^+ c_{-j}^+ \right) \right\} |0\rangle.$$

Что касается вектора

$$|\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,3} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 - \tilde{N}_i} (c_i^+ + c_{-i}^+) + \sqrt{\tilde{N}_i} (c_i - c_{-i}) \right] \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \tilde{N}_j} + \sqrt{\tilde{N}_j} c_j^+ c_{-j}^+ \right) \right\} |0\rangle, \quad (5.28)$$

то он описывает такое возбужденное состояние коллектива, в котором:

$${}_{1,3}\langle \Psi_{\text{возб}} | c_i^+ c_i | \Psi_{\text{возб}} \rangle_{1,3} = {}_{1,3}\langle \Psi_{\text{возб}} | c_{-i}^+ c_{-i} | \Psi_{\text{возб}} \rangle_{1,3} = \frac{1}{2};$$

$${}_{1,3}\langle \Psi_{\text{возб}} | c_i^+ c_i c_{-i}^+ c_{-i} | \Psi_{\text{возб}} \rangle_{1,3} = 1.$$

Это означает, что не именно  $\vec{V}_i$  или  $(\vec{V}_i)$ -состояние достоверно занято одним электроном, а просто одно из двух<sup>1)</sup>. Подобный способ описания, как видим, приводит, на первый взгляд, к тому же качественному результату, что и с помощью векторов  $|\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,1} \cdot |\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,2}$ .

Тем не менее следует заметить, что в возбужденном состоянии, описываемом вектором  $|\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,3}$ , один электрон, присутствующий в одном спаренном  $(\vec{V}_i, -\vec{V}_i)$ -состоянии, вовсе не выглядит свободным в привычном понимании. Не выглядит движущимся прямолинейно и равномерно, как в ситуациях, описываемых векторами  $|\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,1} \cdot |\Psi_{\text{возб}}\rangle_{1,2}$ .<sup>2)</sup>

Итак мы рассмотрели тип возбуждений, когда в одном спаренном состоянии вечно присутствует точно один электрон, и потому это состояние следует исключить из числа тех, в которых могут присутствовать электроны (пар), взаимодействующие друг с другом.

1) Заметим, что в ситуации, в которой  $\tilde{N}(\vec{V}_i, -\vec{V}_i) = 1$ ;  $\tilde{N}(\vec{V}_i) = \tilde{N}(-\vec{V}_i) = 1/2$ , нет места ни равенству  $\tilde{N}(\vec{V}_i, -\vec{V}_i) = \tilde{N}(|\vec{V}_i|)$ , ни равенству  $\tilde{N}(\vec{V}_i, -\vec{V}_i) = \{\tilde{N}(|\vec{V}_i|)\}^2$ . Так и должно быть, если на два состояния приходится точно одна частица. Тогда лишаются смысла как понятие о заполнении сразу двух состояний... одной частицей, так и представление о паре (взаимодействующих) частиц, состоящей из ... одной частицы.

2) К этому замечанию следует вернуться при чтении пп. 5.3.3 и 5.4.2.

б) Решение типа II:

$$\sqrt{1 - \tilde{N}_i} \langle 0 | \Psi_{\text{возб}} \rangle = -\sqrt{\tilde{N}_i} \langle 0 | c_{-i} c_i | \Psi_{\text{возб}} \rangle,$$

которому отвечает вектор

$$| \Psi_{\text{возб}} \rangle_{\text{II}} = \left( -\sqrt{\tilde{N}_i} + \sqrt{1 - \tilde{N}_i} c_i^+ c_{-i}^+ \right) | 0 \rangle.$$

Теперь можно (по индукции) прийти к вектору

$$| \Psi_{\text{возб}} \rangle_{\text{II}} = \hat{A}_{1,i} \cdot \hat{A}_{2,i} | \Psi \rangle = \\ = \left\{ \left( -\sqrt{\tilde{N}_i} + \sqrt{1 - \tilde{N}_i} c_i^+ c_{-i}^+ \right) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \tilde{N}_j} + \sqrt{\tilde{N}_j} c_j^+ c_{-j}^+ \right) \right\} | 0 \rangle, \quad (5.29)$$

описывающему такое возбужденное состояние коллектива, в котором одно спаренное ( $i$ -е) состояние занято тем не менее **двумя** электронами, **участвующими во взаимодействии со всеми** остальными электронами коллектива.

Имеет смысл назвать вектор, заданный соотношением (5.29), вектором двухчастичного возбуждения.

### 5.3.2. Вычисление энергии

Найдем среднюю энергию, отвечающую каждому из двух типов возбужденных состояний коллектива.

а) Одночастичное возбуждение

$$E_{\text{возб},\text{I}} = {}_1 \langle \Psi_{\text{возб}} | \hat{H} | \Psi_{\text{возб}} \rangle_1, \quad (5.30)$$

где  $| \Psi_{\text{возб}} \rangle_1$  задан соотношением (5.28), а оператор  $\hat{H}$  — соотношением (5.4). Будем также предполагать, что возникновение одного одночастичного возбуждения не изменяет величин  $\Delta$ ,  $F$ ,  $\tilde{N}(E, \Delta)$ , найденных при расчете энергии основного состояния. Тогда, подставляя (5.28) и (5.4) в (5.30), получаем:

$$E_{\text{возб},\text{I}} = E_i + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} E_j \cdot \tilde{N}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} U_{jk} \cdot \sqrt{\tilde{N}_j} \cdot \tilde{N}_k \cdot (1 - \tilde{N}_j) (1 - \tilde{N}_k),$$

где все  $j, k$  (но не  $i$ ) принадлежат  $\vec{V}$ -полупространству.



Представим выражение для  $E_{\text{возб},I}$  в более удобном виде:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{возб},I} = & E_i - 2E_i \cdot \tilde{N}_i + 2 \sum_{j=1}^{\infty} E_j \cdot \tilde{N}_j + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} U_{jk} \cdot \sqrt{\tilde{N}_j \cdot \tilde{N}_k \cdot (1 - \tilde{N}_j) (1 - \tilde{N}_k)} - \\
 & - \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} U_{ij} \cdot \sqrt{\tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j)} - \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\infty} U_{ik} \cdot \sqrt{\tilde{N}_k \cdot (1 - \tilde{N}_k)} \right) \times \\
 & \times \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)} = E_{\text{в.э.}} + E_i \cdot (1 - 2 \tilde{N}_i) + 2 \cdot \Delta_i \cdot \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)},
 \end{aligned}$$

где  $E_{\text{в.э.}}$  — энергия, отвечающая основному состоянию и рассчитанная по формулам (5.24), (5.25).

Использование для нахождения величины  $\Delta_i$  тех же предположений, какие использовались для расчета  $E_{\text{в.э.}}$ , позволяет отбросить индекс  $i$  у величины  $\Delta_i$  и написать:

$$E_{\text{возб},I} = E_{\text{в.э.}} + E_i \cdot (1 - 2 \tilde{N}_i) + 2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)}. \quad (5.31)$$

Это выражение есть результат расчета в рамках квантовой теории и большего втиснуть в эти рамки нельзя. Тем не менее присутствие слагаемого

$$E_i \cdot (1 - 2 \tilde{N}_i)$$

явно указывает на увеличение числа частиц коллектива на величину  $(1 - 2 \tilde{N}_i)$ <sup>1)</sup>. Такого не должно быть, если коллектив, пребывавший в основном состоянии в термодинамическом равновесии с термостатом, продолжает оставаться в равновесии, несмотря на возбуждение. Тогда, конечно, следует изъять из возбужденного состояния  $(1 - 2 \tilde{N}_i)$  частиц. В соответствии с законами уже термодинамики, а не квантовой теории, изъятие одной частицы из коллектива сопровождается уменьшением его полной (при  $T=0$ )

1) В  $i$ -м спаренном состоянии появилась точно одна свободная частица, но исчезло  $2 \tilde{N}_i$  взаимодействующих частиц, которые в  $i$ -е спаренное состояние попасть не могут. Напомним, что лишь среднее число взаимодействующих частиц определено точно.

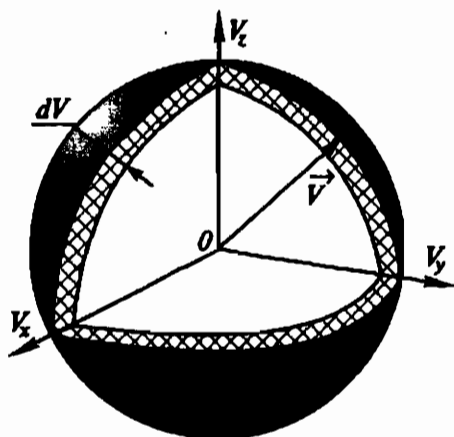


Рис. 5.3. Всем векторам  $\vec{V}$ , "упирающимся" в сферический слой толщиной  $dV$ , отвечает практически одно значение кинетической энергии. Частица может с равной вероятностью обладать в любой момент времени любой скоростью, вектор которой "упирается" в сферический слой  $\vec{V}$ -пространства

энергии на величину  $F$  (уровня Ферми). Поэтому правильное выражение для  $E_{\text{возб},1}$  приобретает вид

$$E_{\text{возб},1} = E_{\text{в.з.}} + (E_i - F) \cdot (1 - 2\tilde{N}_i) + 2\Delta \cdot \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)}. \quad (5.32)$$

Подставляя в (5.32) соотношение (5.20) для  $\tilde{N}_i$ , получаем

$$E_{\text{возб},1} = E_{\text{в.з.}} + \sqrt{\Delta^2 + (E_i - F)^2}. \quad 1) \quad (5.33)$$

Таким образом, величину

$$\sqrt{\Delta^2 + (E_i - F)^2} \equiv E_{\text{квази},i}. \quad (5.34)$$

Следует трактовать как энергию одной квазичастицы, находящейся с равной вероятностью в любом одном из всех тех  $\vec{V}$ -состояний, для которых (рис. 5.3)

$$\frac{m V_i^2}{2} = E_i$$

и из которых, естественно, можно образовать вдвое меньшее число состояний спаренных<sup>2)</sup>.

1) По поводу неравенства  $E_{\text{возб},1} > E_{\text{в.з.}}$ , см. Приложение 3.

2) Если исходить из вектора  $|\Psi_{\text{возб},1}\rangle$ , то одной квазичастицей заполняется вполне определенное спаренное состояние. Однако, если исходить из энергии  $E_{\text{квази}}$ , то последней отвечает бесконечное множество спаренных состояний, и потому заполненным одной квазичастицей может оказаться любое из них с равной вероятностью.

Как следует из формулы (5.33) для порождения одной квазичастицы, необходима энергия, не меньшая  $\Delta$  !

б) Двухчастичное возбуждение

Используя те же формулы для  $\hat{H}$  и  $\Delta$  те же предположения, что в предыдущем случае, получим теперь

$$\begin{aligned}
 E_{\text{возб,II}} &= {}_{\text{II}} \langle \Psi_{\text{возб}} | \hat{H} | \Psi_{\text{возб}} \rangle_{\text{II}} = \\
 &= 2E_i \cdot (1 - \tilde{N}_i) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} E_j \cdot \tilde{N}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} U_{jk} \cdot \sqrt{\tilde{N}_j \cdot \tilde{N}_k \cdot (1 - \tilde{N}_j) (1 - \tilde{N}_k)} = \\
 &= 2E_i \cdot (1 - \tilde{N}_i) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} E_j \cdot \tilde{N}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} U_{jk} \cdot \sqrt{\tilde{N}_j \cdot \tilde{N}_k \cdot (1 - \tilde{N}_j) (1 - \tilde{N}_k)} - \\
 &\quad - 4 \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} U_{ij} \cdot \sqrt{\tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j)} = \\
 &= E_{\text{в.з.}} + 2 \left[ E_i \cdot (1 - 2\tilde{N}_i) + 2\Delta \cdot \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)} \right].
 \end{aligned}$$

С учетом постоянства числа частиц

$$E_{\text{возб,II}} = E_{\text{в.з.}} + 2 \sqrt{\Delta^2 + (E_i - F)^2}. \quad (5.35)$$

Как следует из формулы (5.35), для порождения такого двухчастичного возбуждения требуется вдвое большая энергия, чем для порождения свободной квазичастицы.

Заметим, что величину  $2 \sqrt{\Delta^2 + (E_i - F)^2}$ , фигурирующую именно в формуле (5.35), нельзя трактовать как энергию двух свободных квазичастиц. В соответствии с тем, возбужденным состоянием коллектива, какое описывает вектор  $|\Psi_{\text{возб}}\rangle_{\text{II}}$ ,  $i$ -е спаренное состояние заполнено парой частиц, но взаимодействующих, а не свободных.

### 5.3.3. Энергетический спектр “свободной” квазичастицы

Энергетическим спектром предлагается назвать зависимость полной энергии квазичастицы от ее средней (по времени) скорости. Это предложение соответствует квантовому описанию стационарного состояния свободной частицы или квазичастицы, которое и характеризуется обеими вышеупомянутыми величинами. В соотношении

$$E_{\text{квази}} = \sqrt{\Delta^2 + (E - F)^2} = \sqrt{\Delta^2 + \left( \frac{m \cdot V^2}{2} - F \right)^2},$$

величины  $E_{\text{квази}}$ ,  $E$  являются соответственно полной и кинетической энергиями, а  $\vec{V}$  мгновенной скоростью. (Видно, что множеству различно направленных векторов  $\vec{V}$  одинакового абсолютного значения отвечает одно значение полной энергии). Средней же скоростью  $\langle \vec{V} \rangle_t$ , согласно ее динамическому определению, является величина

$$\langle \vec{V} \rangle_t = \left. \frac{1}{m} \cdot \frac{dE_{\text{квази}}}{d\vec{V}} \right|_{E_{\text{квази}}},$$

где  $\vec{V}$  — мгновенная скорость

Таким образом

$$\langle \vec{V} \rangle_t = \frac{E - F}{E_{\text{квази}}} \cdot \vec{V}. \quad (5.36)$$

Очевидно, что двум противоположно направленным векторам  $\vec{V}_i$  и  $\vec{V}_j$  таким, что  $|V_i| \neq |V_j|$ , но  $|V_i| + |V_j| = 2V_F$ , отвечают одинаково направленные векторы  $\langle \vec{V} \rangle_t$  (рис. 5.4, а). На рис. 5.4, б представлен энергетический спектр квазичастицы. Видно, что в очень узком интервале абсолютных значений мгновенной скорости около  $V_F$  очень слабо отличаются друг от друга абсолютные значения одинаково направленных средних скоростей. Рассмотрим два противоположно направленных вектора  $\vec{V}_i$  и  $\vec{V}_j$  таких, что

$$\vec{V}_i = \vec{V}_F + \vec{\gamma}, \quad \vec{V}_j = -\vec{V}_F + \vec{\gamma}, \quad \cos(\vec{V}_F, \vec{\gamma}) = 0,$$

причем

$$0 < \gamma < \left( \frac{\hbar \cdot \omega_D}{2F} \right) \cdot V_F \ll V_F.$$

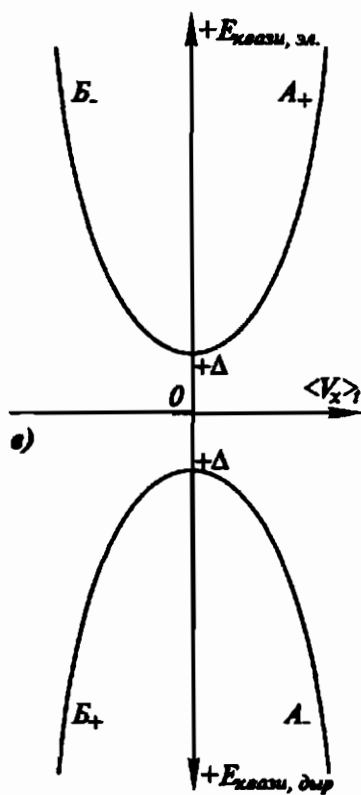
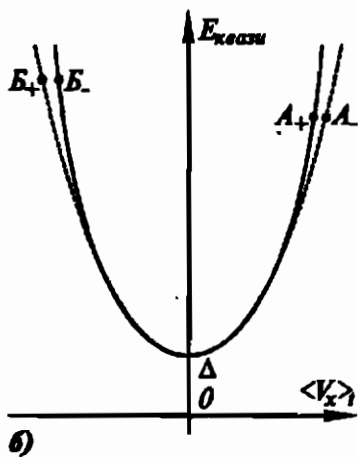
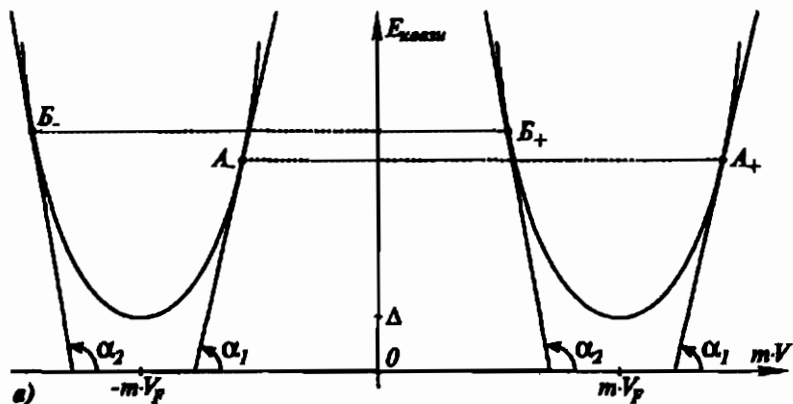


Рис. 5.4. Энергетический спектр свободной квазичастицы:

а) — зависимость  $E_{\text{квази}}(m \cdot \vec{V})$ . Для определенности  $\vec{V}$  направлена вдоль оси  $x$ . Допуская, что  $(\vec{V}_{A_+})_i = (\vec{V}_{A_-})_i (= \text{tg } \alpha_1)$ , мы тем самым считаем, что состояния  $A_+$  и  $A_-$  на самом деле представляют собой одно и то же стационарное состояние, в котором тем не менее может находиться вдвое больше электронов, чем в состоянии только  $A_+$  (или только  $A_-$ ). Все сказанное справедливо для  $B_+$  и  $B_-$ ;

б) — зависимость  $E_{\text{квази}}((\vec{V}_x)_i)$ , построенная в соответствии с п. а);

в) — иной способ построения зависимости  $E_{\text{квази}}((\vec{V}_x)_i)$ . Верхняя ветвь (с положительной полуосью энергий) описывает стационарные состояния, “построенные” из состояний с мгновенными скоростями  $V > V_F$  (находящимися снаружи Ферми-сферы). Нижняя ветвь (также с положительной полуосью энергий) описывает стационарные состояния, построенные из состояний с мгновенными скоростями  $V < V_F$  (находящимися внутри Ферми-сферы).

По традиции: “верхнюю” ветвь называют электронной, “нижнюю” — дырочной; энергию  $E_{\text{квази}} = \Delta$  называют энергией покоя, поскольку  $(\vec{V}(\Delta))_i = 0$ .

Для рождения покоящейся “электронно-дырочной” пары свободных квазичастиц требуется энергия  $2\Delta$ .

Тогда (как следует из формулы (5.36)):

$$\langle \vec{V}_i \rangle_i = \overrightarrow{(V_F + \Upsilon)} \cdot \frac{m \cdot V_F \cdot \Upsilon + \frac{m \cdot \Upsilon^2}{2}}{\left\{ \Delta^2 + m^2 \cdot V_F^2 \cdot \Upsilon^2 \cdot [1 + \Upsilon/V_F + (\Upsilon/2 V_F)^2] \right\}^{1/2}},$$

$$\langle \vec{V}_j \rangle_i = -\overrightarrow{(V_F + \Upsilon)} \cdot \frac{-m \cdot V_F \cdot \Upsilon + \frac{m \cdot \Upsilon^2}{2}}{\left\{ \Delta^2 + m^2 \cdot V_F^2 \cdot \Upsilon^2 \cdot [1 - \Upsilon/V_F + (\Upsilon/2 V_F)^2] \right\}^{1/2}}.$$

Очевидно, что с точностью до малых поправок (порядка  $\frac{\Upsilon}{V_F}$  и  $\frac{\Upsilon^2}{V_F^2}$ )

$$\langle \vec{V}_i \rangle_i = \langle \vec{V}_j \rangle_i = \vec{V}_F \cdot \frac{m \cdot V_F \cdot \Upsilon}{\sqrt{\Delta^2 + m^2 \cdot V_F^2 \cdot \Upsilon^2}}.$$

и можно было бы считать, что одному стационарному состоянию с определенной полной энергией  $E_{\text{квази}}$  и определенной средней ско-

ростью  $\langle \vec{V}(E_{\text{квази}}) \rangle$ , отвечают две мгновенные скорости, направленные в противоположные стороны, но равные по абсолютной величине<sup>1)</sup>.

Разумеется, в этом случае нужно считать, что число электронов, которые заполняют одно состояние со скоростью  $\langle \vec{V} \rangle$ , оказывается ровно вдвое большим, чем число состояний со скоростью  $\vec{V}$ .

В заключение обратим внимание на любопытное обстоятельство. Свободная квазичастица, обладающая точно определенной энергией  $E_{\text{квази}}$  и соответствующей этой энергии средней скоростью, непрерывно меняет направление своей мгновенной скорости<sup>2)</sup>. Такое впечатление, что квазичастица все-таки взаимодействует и не является свободной, хотя бы в том смысле, в каком мы считаем электроны проводимости нормального металла. По-видимому, правильнее считать ее свободной в кавычках и в дальнейшем мы примем более подходящее определение<sup>3)</sup>.

Целесообразно перейти к более удобному описанию энергетического спектра "свободной" квазичастицы (рис. 5.4, а). Учитывая, что состояния, характеризуемые точками, принадлежащими сплошной линии на рис. 5.4, б, это все разные состояния<sup>4)</sup>, объединим их в первую группировку — квазиэлектронных (кинетическая энергия ( $E$ ) частиц в этих состояниях удовлетворяет состоянию  $E \geq F$ ).

1) Равенство по абсолютной величине остается приближенно справедливым пока  $E_{\text{квази}} \leq \hbar \cdot \omega_D \cdot [1 + (\Delta/\hbar \cdot \omega_D)^2]$ , то есть в интервале энергий  $\pm \hbar \cdot \omega_D$  около  $F$ . Но именно такой интервал нас только и интересует. Допуская подобное равенство, мы должны слить сплошную и штриховую линии на рис. 5.8, б.

2) Векторы  $\langle \vec{V} \rangle$ , и  $\vec{V}$  то совпадают по направлению, то противоположны.

3) Заметим, что упомянутый электрон зоны проводимости на самом деле взаимодействует с потенциальным полем. Он тоже находится в состоянии с точно определенной энергией и средней скоростью, а его мгновенная скорость вдоль любого направления может принимать любое из множества значений, отличающийся друг от друга на  $\pm \frac{2\pi \hbar}{a_k \cdot m} \cdot \vec{v}_k$ , где  $a_k$  — пространственный период поля в  $k$ -м направлении, а

$\vec{v}_k$  — число, принимающее значения 0, 1, 2, 3, ... Ничего подобного не имеет места для нашей "свободной" квазичастицы, так что если она и взаимодействует, то не с идеальным периодическим полем ионов кристаллической решетки.

4) В частности одному определенному значению и модулю скорости  $\langle \vec{V} \rangle$ , отвечает множество разных направлений этой скорости в телесном угле  $4\pi$  стерадиан.

С точностью до малых поправок зависимость полной энергии “квазиэлектрона” (принадлежащего первой группировке) от его средней скорости имеет вид

$$E_{\text{квази эл}} = \frac{\Delta}{\sqrt{1 - \frac{m \cdot \langle V \rangle_t^2}{2F}}}, \quad \text{причем} \quad \frac{m \cdot \langle V \rangle_t^2}{2} \leq F \cdot \left(1 - \frac{\Delta^2}{\hbar^2 \cdot \omega_D^2}\right).$$

Совершенно аналогичное рассуждение следует использовать в отношении состояний, характеризуемых точками на штриховой линии на рис. 5.4, б. В итоге для частиц, оказывающихся в состояниях, принадлежавших второй группировке — квазидырочных (кинетическая энергия ( $E$ ) частиц в этих состояниях удовлетворяет соотношению  $E \leq F$ ), — также:

$$E_{\text{квази дыр}} = \frac{\Delta}{\sqrt{1 - \frac{m \cdot \langle V \rangle_t^2}{2F}}}, \quad \text{причем} \quad \frac{m \cdot \langle V \rangle_t^2}{2} \leq F \cdot \left(1 - \frac{\Delta^2}{\hbar^2 \cdot \omega_D^2}\right).$$

Подчеркнем, что частицы обеих группировок — “свободные” частицы с отрицательным электрическим зарядом ( $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл) и положительной массой<sup>1)</sup>. Пока сверхпроводник находится в бестоковом состоянии, распределение частиц обеих группировок по средним скоростям сферически симметричное. Но если внешнее электрическое поле вызовет ускорение, то это ускорение будет направлено в одну и ту же сторону как для “квазиэлектронов”, так и для “квазидырок” (поскольку знаки масс и зарядов тех и других совпадают). В результате частицы обеих группировок внесут одинаковый вклад в полный ток нормальных частиц<sup>2)</sup>.

## §5.4. Тепловые возбуждения и критическая температура

### 5.4.1. Качественный анализ

Ранее уже говорилось, что с рассеивателями электроны сталкиваются от случая к случаю (и не все сразу), а потому взаимодействие

1) Различие в значениях массы (эффективной) частиц обеих группировок очень невелико.

2) Вклад одинаков и по направлению и (с учетом ничтожного различия в величинах масс) по величине. См. в этой связи п. 5.5.5 с.с. 296, 297.



между электронами в принципе может успевать восстанавливать одинаковость степеней заполнения состояний, образующих спаренное.

Тепловые возбуждения так же, как и рассеиватели, приводят к изменению заполнения состояний в  $\vec{V}$ -пространстве. Однако действуют эти возбуждения непрерывно повсюду. Именно поэтому одна часть спаренных состояний оказывается постоянно занятой — каждое спаренное состояние — вообще одним электроном<sup>1)</sup>, и еще часть, хотя и занята постоянно — каждое спаренное состояние — двумя электронами, но степень заполнения его оказывается измененной<sup>2)</sup>.

Понятно, что число взаимодействующих электронов уменьшается, коль скоро в части спаренных состояний оказывается достоверно по одной частице. Однако кроме этого ослабевает сила взаимодействия между электронами, еще продолжающими взаимодействовать. И причиной тому упоминавшийся ранее кооперативный эффект.

Поясним, в чем дело. Признаком пребывания коллектива электронов в сверхпроводящей фазе (то есть — неравенством нулю силы взаимодействия между электронами) было меньшее значение полной энергии коллектива по сравнению с соответствующим нормальной фазе, в которой все электроны являются свободными (невзаимодействующими). Разность энергий обеих фаз при  $T = 0$  была пропорциональна величине  $\Delta^2$ , а эта последняя равнялась

$$\Delta = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \sqrt{\bar{N}_j} \cdot (1 - \bar{N}_j),$$

где все  $U_{ij}$  — одного знака.

1) Имеются в виду состояния, которым отвечают в векторе  $|\Psi_{\text{возб}}\rangle$  множители вида  $\frac{1}{\sqrt{2}}(c_i^+ + c_{-i}^+) |0\rangle$ .

2) Имеются в виду состояния, которые отвечают в векторе  $|\Psi_{\text{возб}}\rangle$  множители вида  $(-\sqrt{\bar{N}_i} + \sqrt{1 - \bar{N}_i}) c_i^+ c_{-i}^+ |0\rangle$ .

Очевидно, что величина  $\Delta$  тем меньше, чем больше число состояний, для которых  $\tilde{N} = 0$  или  $\tilde{N} = 1$ . Однако для тех состояний, для которых  $0 < \tilde{N} < 1$ <sup>1)</sup>, значение  $\tilde{N}$  само зависит от  $\Delta$ , и при  $\Delta \rightarrow 0$ :

$$\tilde{N} \rightarrow \begin{cases} 1 \\ \text{или} \\ 0 \end{cases}$$

Как будет показано впоследствии, упомянутая выше разность энергий при  $T \neq 0$  не пропорциональна точно  $\Delta^2$ , но уменьшается с уменьшением  $\Delta$ , а ведь точно также связана с потенциальной энергией и сила взаимодействия.

Тот факт, что при  $T > 0$  в части  $\vec{V}$ -пространства заполненным оказывается лишь одно из каждого двух состояний, образующих спаренное, означает появление “свободных” электронов.

#### 5.4.2. Температурная зависимость “щели” — величины $\Delta$

Вычислим сначала полную энергию электронов металла, находящегося в сверхпроводящей фазе при температуре  $T > 0$ . Напомним, что наряду с взаимодействующими, в коллектив электронов теперь входят и “свободные”.

Как и прежде,

$$E(T) = \langle \Psi(T) | \hat{H} | \Psi(T) \rangle,$$

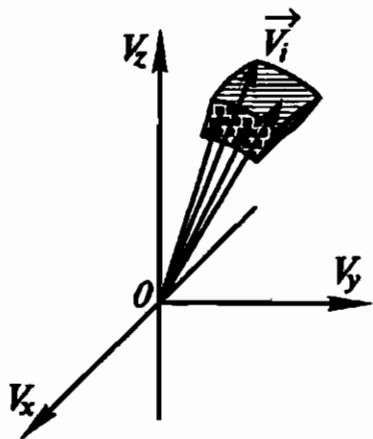
где  $E(T)$  — упомянутая энергия,  $|\Psi(T)\rangle$  — вектор состояния, отвечающий  $T > 0$ ;  $\hat{H}$  — прежний (заданный равенством (5.2)) оператор.

Физической частью задачи является установление вида вектора  $|\Psi(T)\rangle$ .

Разобьем все  $\vec{V}$ -пространство на ячейки одинакового объема, причем такие, чтобы все векторы  $\vec{V}$ , входящие в одну ячейку, были практически одинаковы по модулю и направлению (рис. 5.5). Число состояний, входящих в каждую ячейку, будет одинаковым (поскольку одинаковы объемы ячеек), и мы обозначим его буквой  $M$ . Гречес-

<sup>1)</sup> Это неравенство — признак участия частицы во взаимодействии.

Рис. 5.5.  $\mu$ -я ячейка в  $\vec{V}$ -полупространстве. Ее объем должен быть настолько мал, чтобы считать все состояния "внутри нее" (векторы  $\vec{V}_i$ ) почти одинаковыми, но достаточно велик, чтобы этих состояний (векторов  $\vec{V}_i$ ) оказалось много



кими буквами будем нумеровать ячейки, латинскими — состояния. Индекс  $\mu$ , обозначает, что перед нами именно та ячейка, в которой оказалось  $i$ -е состояние: индекс  $i_\mu$  означает, что перед нами именно то состояние, которое оказалось в  $\mu$ -й ячейке.

Еще одно замечание нужно сделать в связи с использованием рис. 5.5. Как было показано в п. 5.3.1, вектор, описывающий коллектив, находящийся в ситуации, когда в спаренном ( $k$ -м) состоянии точно находится один "свободный" электрон, имеет вид

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (c_k^+ + c_{-k}^+) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \bar{N}_i} + \sqrt{\bar{N}_i} c_i^+ c_{-i}^+ \right) \right\} |0\rangle,$$

но, поскольку мы решили ограничиться ячейками  $\vec{V}$ -полупространства, имеет смысл представить упомянутый вектор в виде

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} c_k^+ \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \left( \sqrt{1 - \bar{N}_i} + \sqrt{\bar{N}_i} c_i^+ c_{-i}^+ \right) \right\} |0\rangle,$$

где не только все  $i$ , но и  $k$  принадлежат полупространству.

Вектор состояния  $|\Psi(T)\rangle$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 |\Psi(T)\rangle = & \dots \cdot \left\{ \left[ \prod_{i_\mu=1}^{I_\mu} \left( \sqrt{1-\tilde{N}_{i_\mu}} + \sqrt{\tilde{N}_{i_\mu}} c_{i_\mu}^+ c_{-i_\mu}^+ \right) \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{k_\mu=1}^{K_\mu} c_{k_\mu}^+ \right] \times \right. \\
 & \times \left. \left[ \prod_{l_\mu=1}^{L_\mu} \left( -\sqrt{\tilde{N}_{l_\mu}} + \sqrt{1-\tilde{N}_{l_\mu}} c_{l_\mu}^+ c_{-l_\mu}^+ \right) \right] \right\} \cdot \left\{ \left[ \prod_{l_\nu=1}^{L_\nu} \left( \sqrt{1-\tilde{N}_{l_\nu}} + \sqrt{\tilde{N}_{l_\nu}} c_{l_\nu}^+ c_{-l_\nu}^+ \right) \right] \times \right. \\
 & \times \left. \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{k_\nu=1}^{K_\nu} c_{k_\nu}^+ \right] \cdot \left[ \prod_{l_\nu=1}^{L_\nu} \left( -\sqrt{\tilde{N}_{l_\nu}} + \sqrt{1-\tilde{N}_{l_\nu}} c_{l_\nu}^+ c_{-l_\nu}^+ \right) \right] \right\} \cdot \dots |0\rangle = \\
 & = \prod_{\mu=1}^{\infty} |\Psi_\mu(T)\rangle, \tag{5.37}
 \end{aligned}$$

где  $|\Psi_\mu(T)\rangle$  — вектор, отвечающий  $\mu$ -ячейке, причем:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_\mu(T)\rangle = & \left[ \prod_{i_\mu=1}^{I_\mu} \left( \sqrt{1-\tilde{N}_{i_\mu}} + \sqrt{\tilde{N}_{i_\mu}} c_{i_\mu}^+ c_{-i_\mu}^+ \right) \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{k_\mu=1}^{K_\mu} c_{k_\mu}^+ \right] \times \\
 & \times \left[ \prod_{l_\mu=1}^{L_\mu} \left( -\sqrt{\tilde{N}_{l_\mu}} + \sqrt{1-\tilde{N}_{l_\mu}} c_{l_\mu}^+ c_{-l_\mu}^+ \right) \right] |0\rangle, \tag{5.38} \\
 & |0\rangle \cdot |0\rangle \cdot \dots \cdot |0\rangle = |0\rangle,
 \end{aligned}$$

все  $i, k, l$  — относятся к  $\vec{V}$ -полупространству.

Что касается чисел  $I_\mu, K_\mu, L_\mu$ , то каждое из них — число состояний, заполненных соответствующим образом и входящих в одну ( $\mu$ -ю) ячейку. Разумеется число  $I_\mu$  равно числу спаренных состояний, то есть — состояний, образованных парами  $i$  и  $(-i)$  и т.д. То же самое относится к числам  $K_\mu$  и  $L_\mu$ . Заметим, что сумма этих трех чисел равна  $M$  ( $I_\mu + K_\mu + L_\mu = M$ ) и одинакова для каждой ячейки  $\vec{V}$ -полупространства, поскольку мы договорились, что объемы всех ячеек одинаковы.

Подчеркнем, что выражение (5.37) в точности соответствует трем возможным способам заполнения состояний, из которых два отражают результат действия возбуждений. Наконец заметим, что числа  $I_\mu$ ,  $K_\mu$ ,  $L_\mu$  в отдельности остаются пока неизвестными: мы не можем знать заранее, сколько именно состояний заполнено определенным способом.

Поскольку расчет  $E(T)$  оказывается очень громоздким, вычислим по отдельности средние кинетическую и потенциальную энергии. Временно будем использовать сокращенные обозначения:

$$c_j^+ c_{-j}^+ \equiv b_j^+, \quad c_{-j} c_j \equiv b_j, \quad \sqrt{N_j} \equiv p_j, \quad \sqrt{1 - N_j} \equiv s_j.$$

#### 5.4.2.1. Расчет зависимости $E_{\text{кин}}(T)$

Поддействовав оператором  $c_j^+ c_j$  на  $|\Psi(T)\rangle$ , получим:

$$\begin{aligned} & c_j^+ c_j |\Psi(T)\rangle = \\ & = \dots \cdot \left\{ \left[ \delta_{j,\mu}^A \cdot p_j \cdot b_j^+ \cdot \prod_{\substack{l_\mu=1 \\ l_\mu \neq j}}^{l_\mu} (s_{l_\mu} + p_{l_\mu} b_{l_\mu}^+) \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{\substack{k_\mu=1 \\ k_\mu \neq j}}^{k_\mu} c_{k_\mu}^+ \right] \times \right. \\ & \times \left[ \prod_{l_\mu=1}^{L_\mu} (-p_{l_\mu} + s_{l_\mu} b_{l_\mu}^+) \right] |0\rangle + \left[ \prod_{l_\mu=1}^{L_\mu} (s_{l_\mu} + p_{l_\mu} b_{l_\mu}^+) \right] \cdot \left[ \delta_{j,\mu}^B \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{\substack{k_\mu=1 \\ k_\mu \neq j}}^{k_\mu} c_{k_\mu}^+ \right] \times \\ & \times \left[ \prod_{l_\mu=1}^{L_\mu} (-p_{l_\mu} + s_{l_\mu} b_{l_\mu}^+) \right] |0\rangle + \left[ \prod_{l_\mu=1}^{L_\mu} (s_{l_\mu} + p_{l_\mu} b_{l_\mu}^+) \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{k_\mu=1}^{K_\mu} c_{k_\mu}^+ \right] \times \\ & \times \left. \left[ \delta_{j,\mu}^B \cdot s_j \cdot b_j^+ \cdot \prod_{\substack{l_\mu=1 \\ l_\mu \neq j}}^{L_\mu} (-p_{l_\mu} + s_{l_\mu} b_{l_\mu}^+) \right] |0\rangle \right\} \dots = \\ & = \left\{ \delta_{j,\mu}^A \cdot \frac{p_j b_j^+}{s_j + p_j b_j^+} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \delta_{j,\mu}^B + \delta_{j,\mu}^B \cdot \frac{s_j \cdot b_j^+}{-p_j + s_j b_j^+} \right\} |\Psi(T)\rangle. \quad (5.39) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\delta_{j,\mu}$  призваны учесть, что  $j$ -е состояние может принадлежать или не принадлежать группе состояний, входящих в число: либо  $I_\mu$ , либо  $K_\mu$ , либо  $L_\mu$  (но при всем том — в  $\mu$ -ю ячейку):

$$\delta_{j,\mu}^A = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in I_\mu, \\ 0, & \text{если } j \notin I_\mu. \end{cases}$$

$$\delta_{j,\mu}^B = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in K_\mu, \\ 0, & \text{если } j \notin K_\mu, \end{cases}$$

$$\delta_{j,\mu}^C = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in L_\mu, \\ 0, & \text{если } j \notin L_\mu. \end{cases}$$

Оператор кинетической энергии, входящей в оператор  $\hat{H}$ , имеет вид

$$\left[ \sum_{i=1}^{\infty} E_i (c_i^\dagger c_i + c_{-i}^\dagger c_{-i}) \right] \equiv \hat{E}_{\text{кин}},$$

где все  $i$  принадлежат  $\vec{V}$ -полупространству.

Поскольку мы имеем дело только со спаренными состояниями, можно упростить вид  $\hat{E}_{\text{кин}}$ , написав

$$\hat{E}_{\text{кин}} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} E_i c_i^\dagger c_i,$$

и полагая по-прежнему все  $i$  принадлежащими  $\vec{V}$ -полупространству<sup>1)</sup>. Далее представим  $\hat{E}_{\text{кин}}$  в виде

$$\hat{E}_{\text{кин}} = \left\{ \dots + 2 \sum_{i_\mu=1}^M E_{i_\mu} c_{i_\mu}^\dagger c_{i_\mu} + 2 \sum_{i_\nu=1}^M E_{i_\nu} c_{i_\nu}^\dagger c_{i_\nu} + \dots \right\}.$$

1) Появление двойки перед знаком суммы в выражении для  $\hat{E}_{\text{кин}}$  восстанавливает правильный результат. Ведь при расчете использовался вектор  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} c_i^\dagger \prod \dots \right\} |0\rangle$  вместо вектора  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (c_i^\dagger + c_{-i}^\dagger) \cdot \prod \dots \right\} |0\rangle$  (см. замечание на стр. 242). Заметим, что  $\langle 0 | \frac{1}{\sqrt{2}} c_i \cdot 2 c_i^\dagger c_i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} c_i^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \frac{1}{\sqrt{2}} (c_i + c_{-i}) (c_i^\dagger c_i + c_{-i}^\dagger c_{-i}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} (c_i^\dagger + c_{-i}^\dagger) | 0 \rangle = 1$ .

С учетом принятого в начале п. 5.4.2 условия о практической одинаковости всех векторов  $\vec{V}$ , входящих в одну ячейку, можно считать, что:

а) для всех  $M$  состояний  $\mu$ -й ячейки

$$E_{l_\mu} = E_{k_\mu} = E_{j_\mu} = E_{j'_\mu},$$

где символом  $J$  перенумерованы все вообще состояния  $\mu$ -й ячейки:

б) для каждого из  $I_\mu$  состояний величина  $p_{j_\mu}$  одна и та же, аналогично — величина  $s_{j'_\mu}$ ;

в) для каждого из  $L_\mu$  состояний величина  $s_{j_\mu}$  одна и та же, аналогично — величина  $p_{j'_\mu}$ .

Теперь, используя выражение (5.39), найдем результат действия

оператора  $2 \sum_{j_\mu=1}^M E_{j_\mu} c_{j_\mu}^+ c_{j_\mu}$  на вектор  $|\Psi(T)\rangle$ :

$$\left( 2 \sum_{j_\mu=1}^M E_{j_\mu} c_{j_\mu}^+ c_{j_\mu} \right) |\Psi(T)\rangle = \left\{ \frac{p_{j_\mu} b_{j_\mu}^+}{s_{j_\mu} + p_{j_\mu} b_{j_\mu}^+} \cdot 2 E_{j_\mu} \cdot I_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 E_{j_\mu} \cdot K_\mu + \frac{s_{j_\mu} b_{j_\mu}^+}{-p_{j_\mu} + s_{j_\mu} b_{j_\mu}^+} \cdot 2 E_{j_\mu} \cdot L_\mu \right\} |\Psi(T)\rangle. \quad (5.40)$$

Коэффициенты  $\delta_{j_\mu}^{A,B}$  опущены, так как в соответствии с выражениями (5.37) и (5.38):

состояние  $j_\mu$  принадлежит  $I_\mu$  раз группе  $l_\mu$ ;

состояние  $j'_\mu$  принадлежит  $K_\mu$  раз группе  $k_\mu$ ;

состояние  $j_\mu$  принадлежит  $L_\mu$  раз группе  $l'_\mu$ .

После этого уже нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(T) | \left( 2 \sum_{j_\mu=1}^M E_{j_\mu} c_{j_\mu}^+ c_{j_\mu} \right) | \Psi(T) \rangle = \\ & = M \cdot \left( \frac{I_\mu}{M} \cdot p_{j_\mu}^2 + \frac{1}{2} \frac{K_\mu}{M} + \frac{L_\mu}{M} \cdot s_{j_\mu}^2 \right) 2 E_{j_\mu} = \left( I_\mu \cdot p_{j_\mu}^2 + \frac{1}{2} K_\mu + L_\mu \cdot s_{j_\mu}^2 \right) \cdot 2 E_{j_\mu}. \end{aligned}$$

Кинетическая энергия, приходящаяся на одно спаренное состояние в  $\mu$ -й ячейке равна

$$\langle E_{j_\mu} \rangle = \left( \frac{I_{\mu j}}{M} \cdot p_{j_\mu}^2 + \frac{1}{2} \frac{K_{\mu j}}{M} + \frac{L_{\mu j}}{M} \cdot s_{j_\mu}^2 \right) \cdot 2E_{j_\mu}. \quad (5.41)$$

Добавление индекса  $j$  в символы  $I_\mu$ ,  $K_\mu$ ,  $L_\mu$  имеет целью обратить внимание на то, что  $\mu$ -я ячейка содержит именно  $j$ -е состояние.

Очевидно, что в формуле (5.41) можно опустить или индекс  $j$ , или индекс  $\mu$ . Если сделать последнее, то  $j$ -му состоянию (в какой бы ячейке оно ни оказалось) будет отвечать 3 числа:

$$\frac{I_j}{M}, \quad \frac{K_j}{M}, \quad \frac{L_j}{M}.$$

Тогда кинетическая энергия всех ячеек  $\vec{V}$ -полупространства

$$\begin{aligned} E_{\text{кин}}(T) &= \sum_{\substack{\mu=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \left( \sum_{\substack{j_\mu=1 \\ V_j \geq 0}}^M \langle E_{j_\mu} \rangle \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \langle E_j \rangle = \\ &= 2 \sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \left( \frac{I_j}{M} \cdot \bar{N}_j + \frac{1}{2} \frac{K_j}{M} + \frac{L_j}{M} (1 - \bar{N}_j) \right) \cdot E_j. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Выясним, что представляют собой числа  $\frac{I_j}{M}$ ,  $\frac{K_j}{M}$ ,  $\frac{L_j}{M}$ . Введем предположение о существовании новой величины  $\bar{n}_j$  — стационарной степени заполнения электроном одного ( $j$ -го) состояния под действием возбуждения, причем условимся, что (во избежание нарушения принципа запрета Паули)  $0 \leq \bar{n}_j \leq 1$ .

Определим  $\bar{n}_j$  как отношение числа электронов, постоянно заполняющих множество различных состояний с одинаковой энергией, к



числу этих состояний. Тогда  $\tilde{n}_j = \tilde{n}_{-j}$ . Особо подчеркнем: будем считать, что нет никакой корреляции между величинами мгновенными

$$\tilde{n}(\vec{V}_j, t) \text{ и } \tilde{n}(-\vec{V}_j, t); \quad \tilde{n}(\vec{V}_j, t) \text{ и } \tilde{n}(\vec{V}_k, t).$$

Поэтому число спаренных состояний в ячейке, оказавшихся под действием тепловых возбуждений совершенно случайно одновременно занятых — каждое двумя электронами, — равно

$$M \cdot \tilde{n}_j \cdot \tilde{n}_{-j} = M \cdot \tilde{n}_j^2. \quad 1)$$

Число таких спаренных состояний, в которых одно состояние в каждой паре занято, а другое в то же время свободно (опять-таки, по чистой случайности и под действием тепловых возбуждений), равно

$$M \cdot [\tilde{n}_j \cdot (1 - \tilde{n}_{-j}) + \tilde{n}_{-j} \cdot (1 - \tilde{n}_j)] = 2M \cdot \tilde{n}_j \cdot (1 - \tilde{n}_j).$$

Наконец, число спаренных состояний, в которые электроны не смогли попасть под действием тепловых возбуждений одновременно, равно

$$M \cdot [(1 - \tilde{n}_j) + (1 - \tilde{n}_{-j})] = M \cdot (1 - \tilde{n}_j)^2. \quad 2)$$

Очевидно, что

$$I_j = M \cdot (1 - \tilde{n}_j)^2, \quad (5.43)$$

и потому эти  $I_j$  (или  $I_{\mu}$ ) состояний могут заполняться электронами не за счет тепловых возбуждений, а в соответствии с основным состоянием коллектива взаимодействующих частиц.

Естественно, что

$$K_j = 2M \cdot \tilde{n}_j \cdot (1 - \tilde{n}_j), \quad (5.44)$$

ибо именно для  $K_j$  пар состояний характерно, что в каждой паре одно состояние “свободным” (не участвующим во взаимо-

1) Напомним, что по условию для каждого из состояний с одинаковой энергией величина  $\tilde{n}$  должна быть одинаковой.

2) Отметим, что  $M \cdot \left\{ \tilde{n}_j^2 + 2\tilde{n}_j \cdot (1 - \tilde{n}_j) + (1 - \tilde{n}_j)^2 \right\} = M$ .

действиях) электроном занято, тогда как другое в тот же момент пустует.

Относительно же числа  $L_j$  выдвинем предположение, что число спаренных состояний, которые одновременно заполнены (каждое) парой электронов, хотя и участвующих во взаимодействии, но оказавшихся там под действием тепловых возбуждений (случайно!), равно

$$L_j = M \cdot \bar{n}_j^2. \quad (5.45)$$

Таким образом, окончательное выражение для  $E_{\text{кин}}(T)$  представимо в виде

$$\begin{aligned} E_{\text{кин}}(T) &= 2 \sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} E_j \cdot [\bar{N}_j \cdot (1 - \bar{n}_j)^2 + (1 - \bar{N}_j) \cdot \bar{n}_j^2 + \bar{n}_j \cdot (1 - \bar{n}_j)] = \\ &= 2 \sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} E_j \cdot [(1 - 2\bar{n}_j) \cdot \bar{N}_j + \bar{n}_j]. \end{aligned} \quad (5.46)$$

#### 5.4.2.2. Расчет зависимости $E_{\text{пот}}(T)$

Напомним вид оператора потенциальной энергии:

$$\hat{E}_{\text{пот}} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} U_{ij} b_i^+ b_j,$$

где все  $i$  и  $j$  принадлежат  $\vec{V}$ -полупространству.

По определению,

$$E_{\text{пот}}(T) = \langle \Psi(T) | \hat{E}_{\text{пот}} | \Psi(T) \rangle.$$

Вычисление этой величины оказывается гораздо более трудоемким, чем величины  $E_{\text{кин}}(T)$ , а промежуточные выкладки очень громоздкие. Поэтому ниже приведем лишь фрагменты вычисления.

Выражение для одного элемента потенциальной энергии  $\langle \Psi(T) | U_{jj} b_j^\dagger b_j | \Psi(T) \rangle$  получим, представляя на этот раз вектор  $|\Psi(T)\rangle$  в виде

$$|\Psi(T)\rangle = \dots \cdot \left\{ \prod_{k_\mu=1}^{L_\mu} (s_{k_\mu} + p_{k_\mu} b_{k_\mu}^\dagger) \cdot \prod_{k_\nu=1}^{L_\nu} (-p_{k_\nu} + s_{k_\nu} b_{k_\nu}^\dagger) \times \right. \\ \left. \times \prod_{k_\nu=1}^{L_\nu} (s_{k_\nu} + p_{k_\nu} b_{k_\nu}^\dagger) \cdot \prod_{k_\mu=1}^{L_\mu} (-p_{k_\mu} + s_{k_\mu} b_{k_\mu}^\dagger) \right\} \dots |0\rangle. \quad 1)$$

Пусть  $j$ -е состояние окажется в  $\mu$ -й ячейке, а  $f$ -е в  $\nu$ -й ячейке. Тогда

$$\langle \Psi(T) | U_{jj} b_j^\dagger b_j | \Psi(T) \rangle = U_{jj} \cdot \left[ \delta_{f\nu}^A \cdot \delta_{j\mu}^A - \delta_{f\nu}^A \cdot \delta_{j\mu}^B - \right. \\ \left. - \delta_{f\nu}^B \cdot \delta_{j\mu}^A + \delta_{f\nu}^B \cdot \delta_{j\mu}^B \right] \cdot s_f \cdot p_f \cdot s_j \cdot p_j. \quad (5.47)$$

Далее необходимо вычислить величину

$$\langle \Psi(T) | \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq f}}^M U_{jj} b_j^\dagger b_j \right) | \Psi(T) \rangle,$$

полагая, что потенциал  $U_{jj}$  одинаков для всех переходов  $j \rightarrow f$ , (из всех  $j$ -состояний в одно  $f$ -состояние), если  $f \in \nu, j \in \mu$ , <sup>2)</sup> а кроме того, что  $s_j$  и  $p_j$  одинаковы для всех  $j$  в пределах одной ячейки. После этого

$$\langle \Psi(T) | \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq f}}^M U_{jj} b_j^\dagger b_j \right) | \Psi(T) \rangle = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq f}}^M \langle \Psi(T) | U_{jj} b_j^\dagger b_j | \Psi(T) \rangle =$$

1) Сомножители  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{k_\mu=1}^{L_\mu} c_{k_\mu}^\dagger \right)$  опущены, так как вклад в потенциальную энергию воз-

никает только от двух — взаимодействующих — частиц, переходящих из двух состояний, образующих спаренное, в другие два, также образующие спаренное.

2) Переходы могут происходить и в пределах одной ячейки, чему будет соответствовать равенство  $\nu = \mu$ .

$$= U_{fj} \cdot \left[ \delta_{fv}^A \cdot I_\mu - \delta_{fv}^A \cdot L_\mu - \delta_{fv}^B \cdot I_\mu + \delta_{fv}^B \cdot L_\mu \right] \cdot s_f \cdot p_f \cdot s_j \cdot p_j.$$

При точно таких же предположениях относительно переходов из одного  $j$ -состояния во все  $f$ -состояния (в пределах  $v$ -й ячейки) и величин  $s_f$  и  $p_f$  получаем, что:

$$\begin{aligned} & \sum_{f=1}^M \langle \Psi(T) | \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq f}}^M U_{fj} b_f^\dagger b_j \right) | \Psi(T) \rangle = \\ & = U_{fj} \cdot \left[ I_v \cdot I_\mu - I_v \cdot L_\mu - L_v \cdot I_\mu + L_v \cdot L_\mu \right] \cdot s_f \cdot p_f \cdot s_j \cdot p_j. \end{aligned}$$

Далее следует перейти к операции усреднения потенциальной энергии по аналогии с тем, как это делалось при вычислении энергии кинетической. Получим соотношение

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(T) | \left( \sum_{f=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq f}}^M U_{fj} b_f^\dagger b_j \right) | \Psi(T) \rangle = \\ & = M^2 \cdot U_{fj} \cdot \left[ (1 - \bar{n}_f)^2 \cdot (1 - \bar{n}_j)^2 - (1 - \bar{n}_f)^2 \cdot \bar{n}_j^2 - \bar{n}_f^2 \cdot (1 - \bar{n}_j)^2 + \bar{n}_f^2 \cdot \bar{n}_j^2 \right] \times \\ & \quad \times \sqrt{\bar{N}_f \cdot (1 - \bar{N}_f) \cdot \bar{N}_j \cdot (1 - \bar{N}_j)}. \end{aligned}$$

Окончательный результат выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{\text{пот}}(T) = & \sum_{\substack{f=1 \\ V_f \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq f \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{fj} \sqrt{\bar{N}_f \cdot \bar{N}_j \cdot (1 - \bar{N}_f) \cdot (1 - \bar{N}_j)} \times \\ & \times (1 - 2\bar{n}_f) \cdot (1 - 2\bar{n}_j). \end{aligned} \tag{5.48}$$

5.4.2.3. Установление вида зависимостей  $\bar{N}(E), \bar{n}(E, T)$ 

В формуле для нахождения полной энергии  $E(T)$

$$E(T) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} E_i \cdot \left[ (1 - 2 \bar{n}_i) \cdot \bar{N}_i + \bar{n}_i \right] + \\ + \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \sqrt{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_j \cdot (1 - \bar{N}_i) \cdot (1 - \bar{N}_j) \cdot (1 - 2 \bar{n}_i) \cdot (1 - 2 \bar{n}_j)} \quad (5.49)$$

присутствуют неизвестные пока величины  $\bar{N}_i$  и  $\bar{n}_i$ . Чтобы найти их, поступим как в п. 5.2.3: минимизируем энергию, только не полную, а (поскольку  $T > 0$ ) свободную, как того и требует термодинамика.

Обычное выражение для свободной энергии имеет вид

$$E_{\text{своб}}(T) = E(T) - T \cdot S, \quad (5.50)$$

где  $S$  — энтропия коллектива возбужденных теплом, не взаимодействующих друг с другом частиц<sup>1)</sup>. Напомним обычное выражение для энтропии:

$$S = -k_B \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{\alpha} P_{\alpha, i} \cdot \ln P_{\alpha, i} \right), \quad (5.51)$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана;  $P_{\alpha, i}$  — вероятность заполнения  $i$ -го состояния определенным ( $\alpha$ -м) способом. В нашем случае таковых четыре, так что:

$$P_{1,i} = \bar{n}_i^2; \quad P_{2,i} = (1 - \bar{n}_i)^2; \quad P_{3,i} = \bar{n}_i \cdot (1 - \bar{n}_i); \quad P_{4,i} = (1 - \bar{n}_i) \cdot \bar{n}_i.$$

1) Энтропия частиц, взаимодействующих друг с другом с сохранением корреляции между их скоростями, равна нулю.

Таким образом,

$$S = -k_B \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \tilde{n}_i^2 \cdot \ln \tilde{n}_i^2 + (1-\tilde{n}_i)^2 \cdot \ln (1-\tilde{n}_i)^2 + 2 \tilde{n}_i \cdot (1-\tilde{n}_i) \times \right. \\ \left. \times \ln [ \tilde{n}_i \cdot (1-\tilde{n}_i) ] \right\} = -2 k_B \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{n}_i \cdot \ln \tilde{n}_i + (1-\tilde{n}_i) \cdot \ln (1-\tilde{n}_i). \quad (5.52)$$

Отметим, что в формуле (5.52) все  $i$  принадлежат  $\vec{V}$ -полупространству.

Принимая ранее использовавшееся дополнительное условие

$$\langle \Psi(T) | \hat{N} | \Psi(T) \rangle - N_{\text{вст}} = 0, \quad (5.53)$$

будем минимизировать величину

$$E_{\text{своб}}(T) - F \cdot (\langle \Psi(T) | \hat{N} | \Psi(T) \rangle - N_{\text{вст}}) = E_*(T). \quad (5.54, a)$$

Здесь с учетом опыта, приобретенного в п. 5.2.3, сразу же вписан вместо множителя Лагранжа  $L$  уровень Ферми  $F$  (отвечающий температуре  $T$ )<sup>1)</sup>.

Считая величину  $N_{\text{вст}}$  — истинным числом всех частиц, мы тем самым признаем, что в “свободные” частицы и в возбужденные пары превращаются пары взаимодействующие, а потому общее число частиц всех сортов не зависит от температуры (ни от магнитного, электрического полей и т.п. возмущений).

Заметим, что условие (5.53) отражает еще одно важное обстоятельство. Зная, что при  $T > 0$  в металле-сверхпроводнике присутствуют три коллектива частиц, мы фактически постулировали совпадение уровней Ферми всех трех.<sup>2)</sup>

1) Учитывая очень слабую зависимость  $F$  от  $T$  для металла, будем считать, что  $F(T \neq 0) = F(T = 0)$ .

2) Для термодинамически равновесного состояния металла такой постулат отражает условие равновесия. Благодаря этому постулату мы избавились от разбивания одного введенного дополнительного условия на два.

В соответствии с рассуждениями, приведенными в п. 5.4.2.1 при выводе формулы (5.42):

$$\begin{aligned} \langle \Psi(T) | \hat{N} | \Psi(T) \rangle &= 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\bar{}} \left( \frac{I_i}{M} \cdot \tilde{N}_i + \frac{K_i}{M} \cdot \frac{1}{2} + \frac{L_i}{M} \cdot (1 - \tilde{N}_i) \right) = \\ &= 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\bar{}} \left[ (1 - 2\tilde{n}_i) \cdot \tilde{N}_i + \tilde{n}_i \right], \end{aligned}$$

после чего

$$\begin{aligned} E_*(T) &= F \cdot N_{\text{кст}} + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\bar{}} (E_i - F) \cdot \left[ (1 - 2\tilde{n}_i) \cdot \tilde{N}_i + \tilde{n}_i \right] + \\ &+ \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\bar{}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\bar{}} U_{ij} \sqrt{\tilde{N}_i \cdot \tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_i) \cdot (1 - \tilde{N}_j) \cdot (1 - 2\tilde{n}_i) \cdot (1 - 2\tilde{n}_j)} + \\ &+ 2 k_B \cdot T \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\bar{}} \left[ \tilde{n}_i \cdot \ln \tilde{n}_i + (1 - \tilde{n}_i) \cdot \ln (1 - \tilde{n}_i) \right]. \quad (5.54,6) \end{aligned}$$

Найдем сначала минимум  $E_*(T)$  относительно вариаций величины  $\tilde{n}_i$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta E_*(T)}{\delta \tilde{n}_i} &= -4 \cdot (E_i - F) \cdot \tilde{N}_i + 2(E_i - F) - 4 \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)} \times \\ &\times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\bar{}} U_{ij} \sqrt{\tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j) \cdot (1 - 2\tilde{n}_j)} + 2 k_B \cdot T \cdot \ln \frac{\tilde{n}_i}{1 - \tilde{n}_i} = \end{aligned}$$

$$= 2 \left\{ (E_i - F) \cdot (1 - 2 \tilde{N}_i) - 2 \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ \nu_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \sqrt{\tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j)} \times \right. \\ \left. \times (1 - 2 \tilde{n}_j) + k_B \cdot T \cdot \ln \frac{\tilde{n}_i}{1 - \tilde{n}_i} \right\} = 0. \quad (5.55)$$

Введем обозначение

$$\left\{ (E_i - F) \cdot (1 - 2 \tilde{N}_i) - 2 \sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ \nu_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \sqrt{\tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j)} \cdot (1 - 2 \tilde{n}_j) \right\} = \xi_i. \quad (5.56)$$

Ниже будет показано, что  $\xi_i$  — это полная энергия одной “свободной” квазичастицы, чья кинетическая энергия равна  $E_i$ .

Подставляя обозначение  $\xi_i$  (5.56) в (5.55), получаем

$$\tilde{n}_i = \frac{1}{1 + \exp(\xi_i / k_B \cdot T)}. \quad (5.57)$$

Теперь найдем минимум величины  $E_*(T)$  относительно вариаций величины  $\tilde{N}_i$ :

$$\frac{\delta E_*(T)}{\delta \tilde{N}_i} = 2(E_i - F) \cdot (1 - 2 \tilde{n}_i) + \frac{1 - 2 \tilde{N}_i}{\sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)}} \cdot (1 - 2 \tilde{n}_i) \times \\ \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ \nu_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \sqrt{\tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j)} \cdot (1 - 2 \tilde{n}_j) = \\ = (1 - 2 \tilde{n}_i) \cdot \left[ 2(E_i - F) + \frac{1 - 2 \tilde{N}_i}{\sqrt{\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)}} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ \nu_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \sqrt{\tilde{N}_j \cdot (1 - \tilde{N}_j)} \cdot (1 - 2 \tilde{n}_j) \right] = 0. \quad (5.58)$$



Поскольку степень заполнения  $\tilde{n}_j$  зависит от  $E_j$  и  $T$ , обозначим прежним символом  $\Delta_i$  величину

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \sqrt{\tilde{N}_j} \cdot (1 - \tilde{N}_j) \cdot (1 - 2\tilde{n}_j) \equiv \Delta_i(T), \quad (5.59)$$

считая ее, однако, уже зависящей от  $T$ . Подставляя (5.59) в (5.58), получаем

$$\left(\frac{E_i - F}{\Delta_i(T)}\right)^2 = \left(\frac{1 - 2\tilde{N}_i}{2 \cdot \sqrt{\tilde{N}_i} \cdot (1 - \tilde{N}_i)}\right)^2 = \frac{(1 - 2\tilde{N}_i)^2}{4\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i)}. \quad (5.60)$$

Используя свойства пропорций, получаем:

$$\frac{(E_i - F)^2}{\Delta_i^2(T) + (E_i - F)^2} = \frac{(1 - 2\tilde{N}_i)^2}{4\tilde{N}_i \cdot (1 - \tilde{N}_i) + (1 - 2\tilde{N}_i)^2} = (1 - 2\tilde{N}_i)^2,$$

откуда следует, что

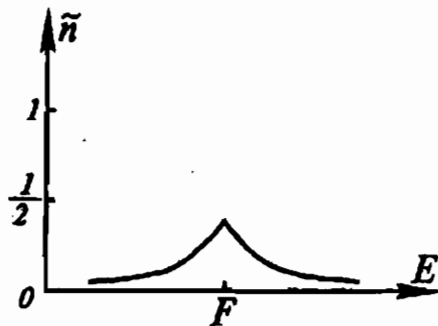
$$\tilde{N}_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{E_i - F}{\sqrt{\Delta_i^2(T) + (E_i - F)^2}} \right]. \quad 1) \quad (5.61)$$

Теперь докажем, что  $\xi_i = \sqrt{\Delta_i^2(T) + (E_i - F)^2}$ . Для этого подставим в (5.56) выражение (5.61). Получаем:

$$\begin{aligned} \xi_i &= (E_i - F) \cdot \frac{(E_i - F)}{\sqrt{\Delta_i^2(T) + (E_i - F)^2}} + \\ &+ 2 \sqrt{\frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{(E_i - F)^2}{\Delta_i^2(T) + (E_i - F)^2} \right]} \cdot \Delta_i(T) = \frac{(E_i - F)^2 + \Delta_i^2(T)}{\sqrt{\Delta_i^2(T) + (E_i - F)^2}} = \\ &= \sqrt{\Delta_i^2(T) + (E_i - F)^2}. \quad 2) \end{aligned}$$

1) По-прежнему считаем квадратный корень только положительным.

2) В соответствии с тем, что сказано в сноске к формуле (5.61), считаем, что  $\xi_i > 0$ .


 Рис. 5.6. Зависимость  $\bar{n}(E)$  при  $0 < T < T_{cp}$ 

После этого разумно и формулу для  $\bar{n}_i$  привести к виду (рис. 5.6):

$$\bar{n}_i = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_i^2(T) + (E_i - F)^2}}{k_B \cdot T}\right)} \quad (5.62)$$

#### 5.4.3. Критическая температура

Подставляя выражения (5.61) и (5.62) в (5.59), приходим к формуле для  $\Delta_i(T)$ :

$$\Delta_i(T) = -\frac{1}{2} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \frac{\Delta_j(T)}{\sqrt{\Delta_j^2(T) + (E_j - F)^2}} \right) \times \\ \times \operatorname{th} \frac{\sqrt{\Delta_i^2(T) + (E_i - F)^2}}{2 k_B \cdot T} \quad (5.63)$$

Используя те же приближения, что и при выводе формулы (5.19), получаем

$$\frac{2}{U_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ V_j \geq 0}}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\sqrt{\Delta_j^2(T) + (E_j - F)^2}}{2 k_B \cdot T} \quad (5.64)$$

а, переходя к интегрированию, получим:

$$\begin{aligned} \frac{4}{U_0 \cdot v \cdot G_E(F)} &= \int_{F - \hbar \omega_D}^{F + \hbar \omega_D} \frac{\sqrt{\Delta^2(T) + (E - F)^2}}{4 k_B^2 \cdot T^2} \cdot d \left( \frac{E - F}{2 k_B \cdot T} \right) = \\ &= \int_{-\frac{\hbar \omega_D}{2 k_B \cdot T}}^{\frac{\hbar \omega_D}{2 k_B \cdot T}} \frac{\text{th} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx, \end{aligned} \quad (5.65)$$

где  $x = \frac{E - F}{2 k_B \cdot T}$ ;  $y = \frac{\Delta(T)}{2 k_B \cdot T}$ .

Проанализируем уравнение (5.65). При очень высокой температуре  $\sqrt{x^2 + y^2} \ll 1$ , и

$$\text{th} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5.66)$$

Однако, пока  $y \neq 0$ , знаменатель в подынтегральном выражении тоже не равен нулю во всем интервале  $-\frac{\hbar \cdot \omega_D}{2 k_B \cdot T} \leq x \leq \frac{\hbar \cdot \omega_D}{2 k_B \cdot T}$ . Только тогда можно подставить приближенное значение гипертангенсов под интеграл, после чего получаем:

$$\frac{4}{U_0 \cdot v \cdot G_E(F)} = \frac{\hbar \cdot \omega_D}{k_B \cdot T}. \quad (5.67)$$

Тем не менее совершенно ясно, что не может равенство (5.67) существовать при разных  $T$ : ведь слева стоит величина, не зависящая от  $T$ .

Таким образом, налицо противоречие: если  $\Delta(T) \neq 0$  при всех  $T$ , то равенство (5.65) не может иметь места при всех  $T$ .

Чтобы предотвратить возможность использования соотношения (5.66) под интегралом (5.65), необходимо подставить равенство

$$\Delta(T) = 0 \text{ при } T \geq T_k. \quad (5.68)$$

Если принять условие (5.68), то равенство (5.65) может иметь место лишь при одном значении температуры, которое и следует назвать критическим ( $T_K$ ).

При  $\Delta(T_K) = 0$  получаем

$$\frac{4}{U_0 \cdot v \cdot G_E(F)} = \frac{\frac{\hbar \omega_D}{2k_B \cdot T_K}}{\int_{-\frac{\hbar \omega_D}{2k_B \cdot T_K}}^{\frac{\hbar \omega_D}{2k_B \cdot T_K}} \frac{\text{th} |x|}{|x|} dx} = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(l-1)} \cdot 2^{2l} \cdot (2^{2l} - 1) \cdot B_l}{(2l)! \cdot (2l - 1)} \cdot \left( \frac{\hbar \cdot \omega_D}{2k_B \cdot T_K} \right)^{(2l-1)}, \quad (5.69)$$

где  $B_l$  — число Бернулли ( $B_l > 0$ ).

В достаточно хорошем приближении

$$\frac{\frac{\hbar \omega_D}{2k_B \cdot T_K}}{2 \int_0^{\frac{\hbar \omega_D}{2k_B \cdot T_K}} \frac{\text{th} x}{x} dx} = 2 \int_{0,438}^{\frac{\hbar \omega_D}{2k_B \cdot T_K}} \frac{dx}{x} = 2 \ln \left( 1,14 \frac{\hbar \omega_D}{k_B \cdot T_K} \right),$$

и стало быть,

$$\frac{4}{U_0 \cdot v \cdot G_E(F)} = 2 \ln \left( 1,14 \frac{\hbar \omega_D}{k_B \cdot T_K} \right). \quad (5.70)$$

Теперь остается сравнить формулы (5.23) и (5.70):

$$\frac{4}{U_0 \cdot v \cdot G_E(F)} = \begin{cases} 2 \ln \left( 1,14 \frac{\hbar \cdot \omega_D}{\Delta(T=0)} \right), \\ 2 \ln \left( 1,14 \frac{\hbar \cdot \omega_D}{k_B \cdot T_K} \right), \end{cases}$$

откуда следует, что

$$T_K = \frac{\Delta(T=0)}{1,76 \cdot k_B}. \quad (5.71)$$

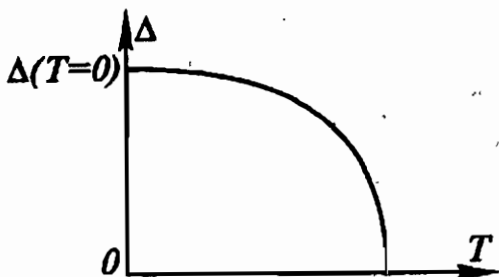


Рис. 5.7. Качественная зависимость  $\Delta$  от  $T$

На рис. 5.7 представлена качественная зависимость  $\Delta(T)$ , полученная численным интегрированием уравнения (5.65).

Тот факт, что при некоторой — критической — температуре величина  $\Delta$  обращается в нуль, мы вынуждены истолковать, как разрушение сверхпроводящей фазы.

Действительно, напишем в соответствии с формулой (5.49) выражение для полной энергии коллектива всех электронов (среди которых есть и “свободные”, и взаимодействующие друг с другом).

При  $\Delta(T) \neq 0$  получаем

$$\begin{aligned}
 E(T) = & \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \left[ 2 E_i \cdot \bar{N}_i - \Delta(T) \cdot \sqrt{\bar{N}_i \cdot (1 - \bar{N}_i)} \right] \cdot \left[ 1 - 2 \bar{n}_i(T) \right] \right\} + \\
 & + \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} E_i \cdot \bar{n}_i(T) = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \cdot \bar{n}_i(T) + \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \left[ 2 E_i \cdot \bar{N}_i - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \Delta(T) \cdot \sqrt{\bar{N}_i \cdot (1 - \bar{N}_i)} \right] \cdot \operatorname{th} \frac{\sqrt{\Delta^2(T) + (E_i - F)^2}}{2 k_B \cdot T} \right\}. \quad 1) \quad (5.72)
 \end{aligned}$$

1) Из-за множителя  $\operatorname{th} \frac{\sqrt{\Delta^2(T) + (E_i - F)^2}}{2 k_B \cdot T}$  даже одно только второе слагаемое в фигурных скобках не строго пропорционально  $\Delta^2(T)$ . В этой связи см. сказанное в предпоследнем абзаце п. 5.4.1.

Как только ширина щели  $\Delta$  обратится в нуль, произойдет следующее:

а) степень заполнения  $\tilde{N}_i$  вырождается в ступенчатую функцию (рис. 5.8, а)

$$\tilde{N}(E_i, T \geq T_K) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E_i - F}{|E_i - F|} \right) = \begin{cases} 1 & \text{при } E_i < F, \\ 0 & \text{при } E_i > F; \end{cases} \quad (5.73)$$

б) степень заполнения  $\tilde{n}_i$  станет равной:

$$\tilde{n}(E_i, T \geq T_K) = \frac{1}{1 + e^{|E_i - F|/k_B \cdot T}}; \quad (5.74)$$

в) выражение (5.72) преобразуется к виду

$$E(T) = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_i \geq 0}}^{\infty} E_i \cdot \left[ \tilde{n}(E_i, T \geq T_K) + \tilde{N}(E_i, T \geq T_K) \cdot \text{th} \frac{|E_i - F|}{2k_B \cdot T} \right]. \quad (5.75)$$

Введем обозначение  $\left[ \tilde{n}_i(T \geq T_K) + \tilde{N}_i(T \geq T_K) \cdot \text{th} \frac{|E_i - F|}{2k_B \cdot T} \right] \equiv \tilde{n}_{\text{ф.д.}}^1$

С учетом (5.73) и (5.74) получаем:

$$\tilde{n}_{\text{ф.д.}} = \begin{cases} \left[ 1 + \exp \frac{E_i - F}{k_B \cdot T} \right]^{-1} & \text{при } E_i \geq F, \\ \left[ 1 + \exp \frac{-|E_i - F|}{k_B \cdot T} \right]^{-1} = \left[ 1 + \exp \left( -\frac{F - E_i}{k_B \cdot T} \right) \right]^{-1} = \left[ 1 + \exp \frac{E_i - F}{k_B \cdot T} \right]^{-1} & \text{при } E_i \leq F. \end{cases}$$

Поэтому можно представить  $\tilde{n}_{\text{ф.д.}}$  в виде

$$\tilde{n}_{\text{ф.д.}}(E_i, T \geq T_K) = \frac{1}{1 + \exp \frac{E_i - F}{k_B \cdot T}} \quad (5.76)$$

то есть обычной функцией Ферми-Дирака как при  $E_i \geq F$ , так и при  $E_i \leq F$  (рис. 5.8, б).

1) Индекс ф.д. введен в предвидении того, что величина  $\tilde{n}_{\text{ф.д.}}$  окажется функцией Ферми-Дирака.

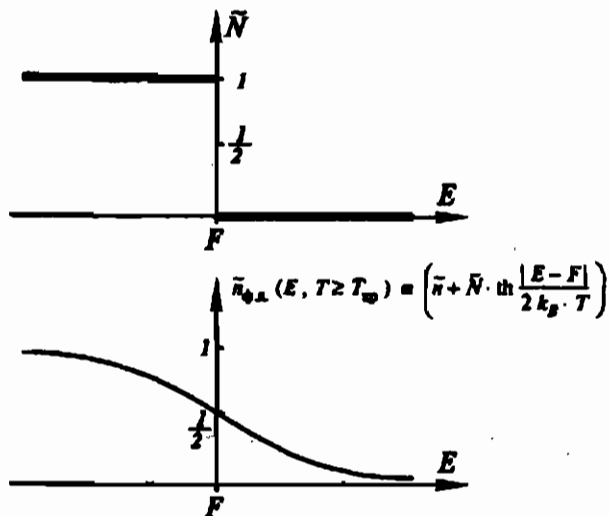


Рис. 5.8. Зависимости величин  $\bar{N}$  и  $\bar{n}_{\Phi, \Lambda}(E, T > T_{ср}) = \left( \bar{n} + \bar{N} \cdot \text{th} \frac{E-F}{2k_B \cdot T} \right)$  от кинетической энергии  $E$  при  $\Delta = 0$ ,  $T > T_{ср}$

Можно иначе прийти к формуле (5.76). Из (5.46) следует, что степень заполнения одного энергетического состояния “просто” электроном (как сверхпроводящим, так и “свободным”) равна

$$(1 - \bar{N}_i) \cdot \bar{n}_i^2 + \bar{n}_i (1 - \bar{n}_i) + (1 - \bar{n}_i)^2 \cdot \bar{N}_i = \bar{m}_i.$$

Если  $\Delta = 0$ , то

$$\bar{N}_i = \begin{cases} 0 & \text{при } E_i \geq F, \\ 1 & \text{при } E_i \leq F, \end{cases}$$

и тогда

$$\bar{m}_i = \begin{cases} \bar{n}_i^2 + \bar{n}_i (1 - \bar{n}_i) = \bar{n}_i & \text{при } E_i \geq F, \\ \bar{n}_i \cdot (1 - \bar{n}_i) + (1 - \bar{n}_i)^2 = 1 - \bar{n}_i & \text{при } E_i \leq F. \end{cases} \quad (5.77, \text{а})$$

$$(5.77, \text{б})$$

Так как при  $\Delta = 0$

$$\bar{n}_i = \frac{1}{1 + \exp \left| \frac{E_i - F}{k_B \cdot T} \right|},$$

то с учетом формул (5.77, а, б) получаем:

$$\bar{m}_i = \frac{1}{1 + \exp \frac{E_i - F}{k_B \cdot T}} \approx \bar{n}_{\Phi, \lambda}$$

как при  $E_i \leq F$ , так и при  $E_i \geq F$ .

Таким образом, при  $T \geq T_K$

$$E_{\text{в.з.}}(T \geq T_K) = \sum_{\substack{i=1 \\ \nu_i \geq 0}}^{\infty} 2 E_i \cdot \frac{1}{1 + \exp \frac{E_i - F}{k_B \cdot T}}, \quad 1)$$

откуда видно, что  $E_{\text{в.з.}}$  превратилась в полную энергию коллектива, состоящего только из свободных (взаимодействующих) электронов.

## §5.5. Критическая плотность тока

### 5.5.1. Реальный эксперимент и интерпретация его результатов

Известно, что по образцу сверхпроводника — элементу электрической цепи — невозможно пропустить постоянный ток больше некоторого, критического, значения<sup>2)</sup>. Попытка сделать это приводит к переходу образца в нормальную фазу. А поскольку реальный образец в нормальной фазе обладает электрическим сопротивлением, переход в нее обязательно сопровождается возникновением в образце-элементе цепи разности потенциалов.

1) Здесь отсутствует еще один множитель 2, учитывающий заполнение одного энергетического состояния двумя электронами с антипараллельными спинами.

2) Подобное явление имеет место как в случае массивной пластины, толщина ( $d$ ) которой много больше глубины проникновения ( $\lambda$ ), так и при  $d \ll \lambda$ . В последнем случае плотность тока однородно распределена по толщине пластины.

Заметим также, что реакция сверхпроводника на включение внешнего магнитного поля обязательно сопровождается возникновением тока (вихревого). Поэтому нельзя считать удивительным разрушение сверхпроводимости внешним магнитным полем. Так как величины  $J$  и  $H$  связаны определенным соотношением (для массивного образца  $H = \lambda \cdot J$ ), из существования критической плотности тока автоматически следует и существование критической напряженности магнитного поля.



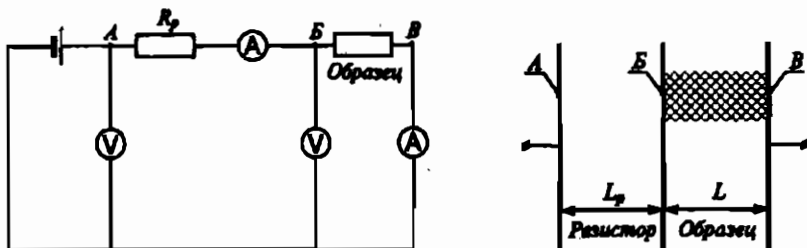


Рис. 5.9. Схема цепи. Вольтметры показывают ЭДС источника и напряжение на образце; амперметры показывают ток в цепи (вне образца)

Рассмотрим цепь, состоящую из регулируемого источника ЭДС, резистора, образца, амперметров и вольтметров постоянного тока (рис. 5.9).

При токе  $I_1$ , меньшем критического ( $I_{кр}$ ), образец остается идеально проводящим, и, следовательно, имеет место соотношение:

$$I_1 = \frac{u_1}{R_p}, \quad (5.78)$$

где  $R_p$  — сопротивление резистора,  $u_1$  — величина ЭДС источника, с которой совпадает напряжение на резисторе. Чтобы увеличить ток, нужно увеличить ЭДС. При токе  $I_2$ , большем  $I_{кр}$ , образец оказывается в нормальной фазе, в которой обладает сопротивлением  $R$ , и тогда

$$I_2 = \frac{u_2}{R_p + R}, \quad (5.79)$$

где  $u_2 > u_1$ .  
Напомним, что

$$I_1 < I_{кр}, \quad (5.80)$$

$$I_2 > I_{кр}. \quad (5.81)$$

Соотношения (5.78—5.81) выражают результаты эксперимента, которые могут быть получены с помощью приборов именно постоянного тока, непригодных для наблюдения за быстрыми изменениями напряжений и тока в цепи. А ведь несомненно, что преобразование соотношения (5.78) в (5.79) связано с переходным процессом. В самом деле, допустим, что до некоторого момента времени  $t_0$ , в цепи

протекал постоянный ток  $I_1 (< I_{кр})$ , напряжение на резисторе ( $u_1$ ) равнялось ЭДС, а напряжение на образце ( $u$ ) равнялось нулю. Предположим, что возможно скачком изменить ЭДС источника на любую величину  $\delta u$  и далее поддерживать ее неизменной. Сделаем это в момент  $t_0$ . Если образец перейдет из сверхпроводящей фазы в нормальную, то — вследствие скачка ЭДС, выступающего в роли причины. Причина и следствие, конечно же, должны быть разделены во времени.

Обратим внимание еще на один результат изменения ЭДС источника. Разность токов  $I_2$  и  $I_1$  равна, согласно (5.78, 5.79):

$$\Delta I = I_2 - I_1 = \frac{R_p \cdot \delta u - R \cdot u_1}{R_p \cdot (R_p + R)}, \quad (5.82)$$

где  $\delta u = u_2 - u_1$  — скачок ЭДС.

Если фазовый переход действительно происходит при достижении током критического значения, можно сделать так, чтобы  $I_2$  и  $I_1$  бесконечно мало отличалось от  $I_{кр}$ , и тогда  $\Delta I \rightarrow 0$ . Из формулы (5.82) следует, что при этом

$$\delta u = u_1 \cdot \frac{R}{R_p} \quad 1) \quad (5.83)$$

То есть скачок ЭДС должен быть обязательно ограничен снизу, ибо целиком упадет на образце, перешедшем в резистивное состояние.

Таким образом, при протекании в цепи постоянного тока, лишь чуть-чуть меньше критического, для фазового перехода необходимо изменение ЭДС на конечную величину.

На рис. 5.10 дано представление о переходном процессе, которое можно получить с помощью приборов постоянного тока.

1) Если устремить  $R_p \rightarrow \infty$ , то изменением ЭДС источника нельзя будет изменить ток в цепи:

$$\lim_{R_p \rightarrow \infty} \Delta I = \lim_{R_p \rightarrow \infty} \frac{\delta u}{R_p} = 0.$$

Тем не менее при очень большой, но все же конечной величине  $R_p$  относительное изменение тока может быть гораздо меньше относительного изменения ЭДС (см. формулы (5.78, 5.79, 5.83)).

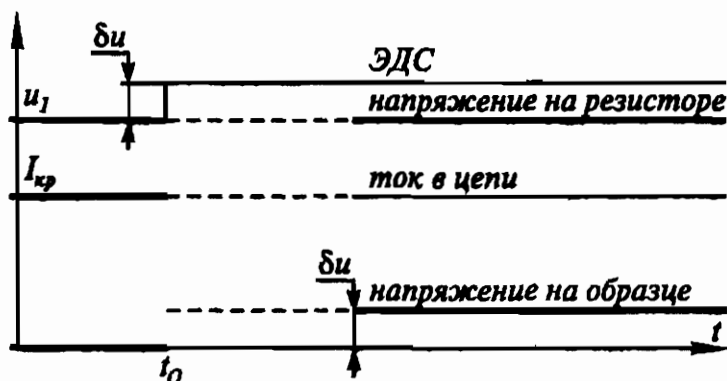


Рис. 5.10. Переходный процесс. Штриховые линии символизируют ненаблюдаемые (с помощью приборов постоянного тока), но предполагаемые зависимости

Попробуем выяснить, как же на самом деле должен развиваться переходный процесс после скачка ЭДС на  $\delta u$ . Будем исходить из начального (до момента  $t_0$ ) распределения потенциала вдоль элементов цепи показанного на рис. 5.11 (линия 1). В момент скачка ЭДС произойдет скачкообразное же изменение зарядов на поверхностях  $A$  и  $B$  (см. рис. 5.9), но не на поверхности раздела  $B$ . Для того, чтобы произошло и это, нужно время, ибо изменение заряда на поверхности  $B$  может быть обусловлено только протеканием токов (причем различных) по обе стороны поверхности. Сказанное очень важно, так как означает, что скачок ЭДС приводит к скачкообразному приращению поля на одинаковую величину и в резисторе, и в образце.

Следовательно, лишь часть скачка ЭДС ( $\delta u \cdot \frac{L}{L_p + L}$ ) упадет на об-

разце, другая часть ( $\delta u \cdot \frac{L_p}{L_p + L}$ ) — на резисторе.

Вследствие прироста напряжения на резисторе начнется увеличение протекающего в нем тока. А что происходит в образце? Бесспорно, что в первые мгновения после скачка ЭДС образец еще остается в сверхпроводящем состоянии. Поэтому если ток начнет возрастать и в образце, то так, как в идеальном проводнике. Но тогда (см. §1.3) поле, а следовательно, и напряжение на образце начнет после скач-

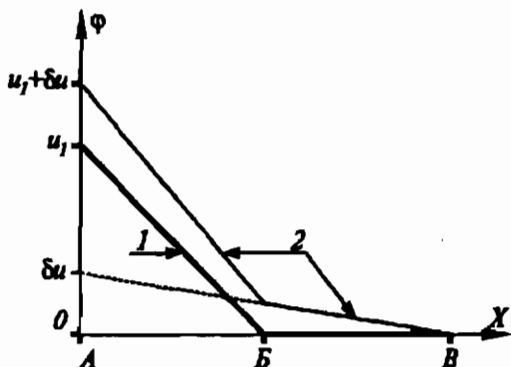


Рис. 5.11. Распределение потенциала вдоль резистора и образца.

1 — до момента  $t_0$ ; 2 — спустя мгновение после момента  $t_0$ .  $AB = L_p$ ;  $BB = L$

кообразного прироста уменьшаться, а на резисторе — увеличиваться, и это будет происходить до тех пор, пока скачок ЭДС  $\delta_i$  не упадет целиком на резисторе. Таким образом, фазовый переход не произойдет! Для его реализации придется выдвинуть удивительное предположение: с момента скачка ЭДС ток, протекающий в образце, еще находящемся в сверхпроводящей фазе, убывает с течением времени. Тогда вследствие “разрыва” в токах по обе стороны поверхности раздела  $B$  находившийся на ней к моменту  $t_0$  отрицательный заряд начнет рассасываться, из-за чего напряжение на резисторе с течением времени будет уменьшаться, а на образце увеличиваться. В итоге начальная стадия переходного процесса, вселяющая некоторую надежду на фазовый переход, должна выглядеть так, как показано на рис. 5.12, а.

Подчеркнем два обстоятельства.

1. Оптимистически выглядят на рис. 5.12, а только зависимости напряжений от времени, поскольку напряжению на резисторе, как мы знаем, предстоит уменьшиться до исходной величины  $u_1$ , а напряжению на образце — возрасти до величины  $\delta_i$ . Зависимости токов от времени оптимизма не внушают.

2. Уменьшение тока в образце одновременно с ростом напряжения на нем означает возникновение и возрастание его сопротивления.

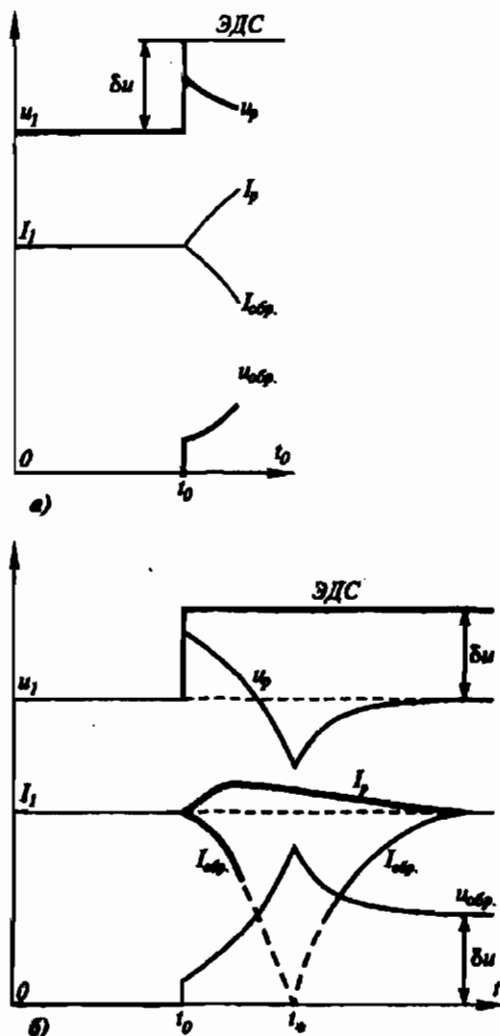


Рис. 5.12. Переходный процесс:

а — начальная стадия. Напряжению на резисторе предстоит уменьшиться до исходного значения  $u_1$ ; напряжению на образце — возрасти до величины  $\Delta u$ . Разрыв в токах должен с течением времени исчезнуть.

б — Промежуточная и завершающая стадии. Возможно, что ток  $I_{обр}$  в момент  $t_1$  спадает до нуля.

Но поскольку образец на начальной стадии находится в сверхпроводящей фазе, упомянутое сопротивление никакого отношения не может иметь к величине  $R$ , отвечающей резистивной фазе.

Обратимся к описанию следующей стадии переходного процесса. Поскольку эксперимент свидетельствует о том, что до и после фазового перехода в цепи протекает постоянный ток практически одной и той же величины ( $I_{\text{кр}}$ ), ток в резисторе должен в конце концов уменьшиться, а в образце — увеличиться. В этой связи заметим, что ток в резисторе  $I_p(t)$  и напряжение на нем  $u_p(t)$  во время переходного процесса связаны известным соотношением

$$I_p(t) = \frac{S_p}{L_p} \cdot \frac{q^2 \cdot n_p}{m} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \cdot \int_{t=0}^t u_p(t') \cdot e^{\frac{t'}{\tau_\sigma}} \cdot dt', \quad (5.84)$$

где  $S_p$ ,  $L_p$ ,  $n_p$ ,  $\tau_\sigma$  соответственно площадь поперечного сечения резистора, его длина, концентрация электронов в нем, время релаксации электропроводности.

Возвращаясь к нашему случаю и учитывая, что в момент  $t_0$ , который мы примем за начало отсчета времени, в резисторе уже протекал ток  $I_1 (= I_{\text{кр}})$ , представим ток  $I_p(t)$  в виде

$$I_p(t) = I_1 + \Delta I(t), \quad 1)$$

где

$$\Delta I(t) = \frac{S_p}{L_p} \cdot \frac{q^2 \cdot n_p}{m} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \cdot \int_{t_0=0}^t [u_p(t') - u_1] \cdot e^{\frac{t'}{\tau_\sigma}} \cdot dt'. \quad (5.85)$$

Если мы ожидаем, что ток  $I_p(t)$  уменьшится до исходной величины  $I_1$ , необходимо, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta I(t) = 0.$$

1) Напомним, что

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{S_p}{L_p} \cdot \frac{q^2 \cdot n_p}{m} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \cdot \int_0^t u_1 \cdot e^{\frac{t'}{\tau_\sigma}} \cdot dt' \right\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{S_p}{L_p} \cdot \frac{q^2 \cdot n_p \cdot \tau_\sigma}{m} \cdot u_1 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}}) \right\} = \frac{S_p}{L_p} \cdot \frac{q^2 \cdot n_p \cdot \tau_\sigma}{m} \cdot u_1 = \frac{u_1}{R_p}. \end{aligned}$$

Из формулы (5.85) сразу видно, что такой предельный переход возможен только, если напряжение  $u_p(t)$  снизится в какой-то момент времени до величины, меньшей  $u_1$ . А в таком случае напряжение на образце возрастет в этот момент до величины большей  $\delta u$ .

Промежуточная стадия, во время которой ток в образце убывает, а напряжение на нем возрастает, должна завершиться, как только образец перейдет в резистивное состояние<sup>1)</sup> (рис. 5.12, б).

Обратимся к завершающей стадии. В это время ток в образце возрастает, как и должно быть в резистивном элементе цепи, включенном под напряжение в момент переходного процесса, в тот момент, когда ток в элементе меньше, чем должен быть в стационарном состоянии. Рост тока в образце ведет к накоплению отрицательного заряда на поверхности раздела  $B$ , из-за чего напряжение на образце уменьшается (до  $\delta u$ ), а на резисторе увеличивается (до  $u_1$ ). Промежуточная и завершающая стадия переходного процесса представлена на рис. 5.12, б.

Вполне логично предположить, что образец перейдет из сверхпроводящей фазы в нормальную в тот момент  $t_*$ , когда ток в нем достигает минимальной величины; однако использование амперметра постоянного тока, разумеется, не позволяет установить, чему именно равна эта минимальная величина. Не исключено, что в момент фазового периода она равна нулю.

### 5.5.2. Мысленный эксперимент; четыре предложения

В этом параграфе мы рассмотрим образец металла, не содержащий никаких дефектов, способных рассеивать электроны и находящийся при  $T=0$ . Хотя нельзя приготовить такой образец реально, равно как и понизить температуру до абсолютного нуля, имеющиеся экспериментальные данные позволяют считать, что и в подобной ситуации существовал бы критический ток. Однако поскольку в этом случае переход образца из сверхпроводящей фазы в нормальную не может сопровождаться возникновением на образце постоянного напряжения, уместно задать вопрос: что же явится признаком свершившегося фазового перехода? Для ответа на вопрос нужно организовать мысленный эксперимент.

<sup>1)</sup> Подчеркнем, что к этому моменту на образце будет существовать напряжение, даже превышающее то стационарное значение, которое отвечает резистивной фазе.

В §1.3 мы рассматривали цепь, состоящую из двух одинаковых металлических резисторов длиной  $L_p$  каждый, образца-сверхпроводника длиной  $L$  и батареи, ЭДС которой ( $\mathcal{E}$ ) можно менять сколь угодно плавно в неограниченных пределах. Для простоты мы тогда допустили, что площади поперечного сечения всех трех элементов цепи одинаковы, а теперь допустим еще, что сверхпроводник настолько тонок, что можно пренебречь и неоднородным распределением плотности тока по его сечению, и магнитным полем этого тока. Условимся считать концентрацию электронов в зоне проводимости — величину  $n$  — одинаковой как для резистивного, так и для сверхпроводящего элементов<sup>1)</sup>.

Теперь мысленно приготовим бездефектный образец и доведем его температуру до абсолютного нуля. Меняя ЭДС батареи, мы могли бы в принципе отнаблюдать зависимость плотности тока в цепи от величины ЭДС батареи с помощью амперметра и вольтметра — приборов постоянного тока, но прежде, чем это сделать, подумаем, какую зависимость следовало бы ожидать. Казалось бы, ее легко построить, установив заранее вид стационарной вольт-амперной характеристики резистора (рис. 5.13), а также принимая во внимание, что напряжение на сверхпроводнике должно быть равно нулю и что все элементы цепи соединены последовательно. Ожидаемая на первый взгляд зависимость представлена на рис. 5.14. Однако “реально наблюдаемая” зависимость выглядит иначе (рис. 5.15). При некоторой ЭДС, обозначенной символом  $\mathcal{E}_*$ , имеет место скачок плотности тока, а кроме того еще при  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_*$  налицо отклонение от закона Ома.

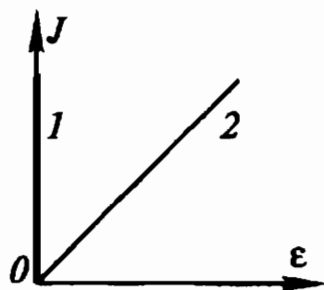


Рис. 5.13. Стационарные зависимости  $J(\mathcal{E})$

1 — образца; 2 — резистора  
 $(J_p = \sigma_p \cdot \mathcal{E}_p)$

<sup>1)</sup> В §1.3 при анализе переходного процесса было принято, что концентрация электронов, участвующих в переносе тока в сверхпроводнике, равна концентрации электронов проводимости в резисторе. Благодаря этому дрейфовые скорости электронов к концу переходного процесса оказались одинаковыми в образце и в резисторах.



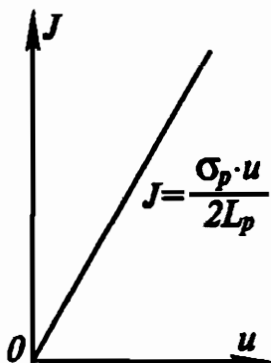


Рис. 5.14. Ожидаемая зависимость  $J(u)$

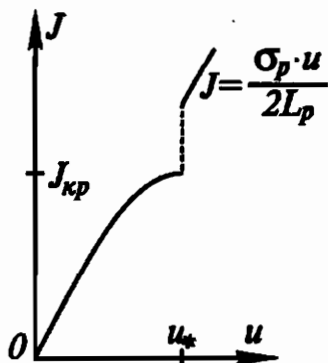


Рис. 5.15 "Наблюдаемая" зависимость  $J(u)$

Такие результаты кажутся поразительными, поскольку в цепи последовательно соединенных элементов за ограничение тока должен отвечать элемент, обладающий наибольшим сопротивлением (см. пример на рис. 5.16). Но ведь из рис. 5.13 следует, что закон Ома для каждого из резисторов не нарушается, а последовательно с ними соединен образец, идеально проводящий при всех токах...

Однако на самом деле все просто. Следует лишь обратить внимание на то, что на рис. 5.15 отложена по оси абсцисс ЭДС источника, с которой совпадает лишь стационарное значение напряжения на резисторе. За время же существования поля еще и в идеальном проводнике в нем также нарастал ток, и стационарное значение этого тока связано со стационарным (по определению) значением приращения ЭДС источника  $\delta u$  соотношениях

$$\Delta I = \frac{S}{L_p + L} \cdot \frac{q \cdot n}{m} \cdot \int_0^{\infty} \delta u \cdot f(t) \cdot dt = \delta u \cdot \left\{ \frac{q \cdot n \cdot S}{m \cdot (L_p + L)} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot dt \right\}$$

(здесь  $f(t)$  — безразмерная функция времени, описывающая плавное изменение поля в идеальном проводнике с того момента, как ЭДС источника изменилась на величину  $\delta u$ , — по предположению, сразу скачком).

Отсюда легко перейти к понятию дифференциальной проводимости идеального проводника ( $\Lambda_{\text{диф.и.п.}}$ ):

$$\Lambda_{\text{диф.и.п.}} = \lim_{\delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\delta u} \quad \text{при } u > 0.$$

Очевидно, что

$$\Lambda_{\text{диф.и.п.}} = \frac{q \cdot n \cdot S}{m \cdot (L_p + L)} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot dt, \quad \Lambda_{\text{диф.рез.}} = \frac{q \cdot n \cdot \tau_{\sigma} \cdot S}{m \cdot L_p}.$$

В принципе вполне можно допустить как то, что

$$\Lambda_{\text{диф.и.п.}} = f(u), \quad \Lambda_{\text{диф.рез.}} = \text{const},$$

так и то, что

$$\Lambda_{\text{диф.и.п.}}(u) < \Lambda_{\text{диф.рез.}},$$

начиная с некоторого значения  $u$ .

Как раз в этом случае имеет место зависимость, представленная на рис. 5.15.

Вернемся к полученному в §1.3 выражению для стационарной плотности тока в сверхпроводящем образце-элементе цепи:

$$J = \frac{I}{S} = q \cdot n \cdot V_{\text{др}} = \frac{q^2 \cdot \tau_{\sigma}}{m} \cdot \frac{u}{2L_p} \cdot \frac{L \cdot n + 2L_p \cdot n_p}{L + 2L_p}. \quad (5.86)$$

Подчеркнем, что в этой формуле  $n_p$  и  $n$  — концентрации электронов в резисторе в образце. В §1.3 мы приняли равенство  $n = n_p$ , после чего стационарная плотность тока в образце

$$J = \sigma_p \cdot \frac{u}{2L_p}$$

оказалась точно такой же, как в резисторе, и точно так же зависящей от ЭДС источника  $u$ .

Формула (5.86) основана на предположении о соблюдении неравенства

$$\left(1 + \frac{L}{2L_p}\right) \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot m}{q^2 \cdot n} \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \ll \varepsilon, \quad (5.87)$$

в котором (напомним) величина  $n$  — концентрация электронов в зоне проводимости металла ( $\approx 3 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ), к каковой мы в §1.3 приравняли не только концентрацию электронов в резисторе ( $n$ ), но

и концентрацию сверхпроводящих электронов ( $n_{св}$ ). Поэтому сейчас перепишем формулы (5.86) и (5.87) следующим образом

$$J = J_p \cdot \frac{L \cdot \frac{n_{св}}{n} + 2L_p}{L + 2L_p}, \quad (5.88)$$

$$\left(1 + \frac{L}{2L_p}\right) \cdot \tau_{пл}^2 \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \ll \frac{n_{св}}{n} \cdot \varepsilon. \quad (5.89)$$

В них по-прежнему  $\tau_{пл}^2 = \frac{\hbar^2 \cdot m}{q^2 \cdot n} = 10^{-32} \text{ с}^2$ ,  $J$  и  $J_p$  — плотности тока в образце и резисторе. Однако в этих формулах  $n_{св}$  — концентрация сверхпроводящих электронов, которая может быть и не равна  $n$ .

Чтобы увеличить вклад сверхпроводящего элемента цепи в обнаруженное отклонение от закона Ома, придем соотношение длин  $L \gg 2L_p$  после чего

$$J = J_p \cdot \frac{n_{св}}{n} \quad (5.90)$$

Конечно, условие  $\frac{n_{св}}{n} \ll 1$  не будет способствовать выполнимости неравенства (5.89). Но и неравенство

$$\left(1 - \frac{n_{св}}{n}\right) \ll 1, \quad (5.91)$$

не мешает величине  $J$  стать меньшей, чем  $J_p$ .

После преобразования формулы (5.90) к виду

$$J = \left(u \cdot \frac{\delta}{2L_p}\right) \cdot \frac{n_{св}}{n}$$

становится понятно, что наблюдаемое в нашем мысленном эксперименте отклонение стационарной зависимости  $J(u)$  от линейной объясняется уменьшением  $n_{св}$  с ростом  $u$ .<sup>2)</sup>

1) Предполагается, что по-прежнему  $n_p = n$ .

2) Заметим, что за время существования поля в идеальном проводнике плотность тока нарастает на ограниченную величину. В рассматриваемой ситуации из-за уменьшения  $n_{св}$  за время существования поля в сверхпроводнике приращение величины тока оказывается меньшим, чем в последовательно соединенном резисторе.

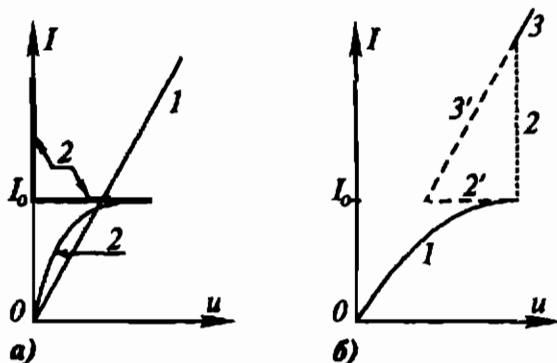


Рис. 5.16. Примеры вольт-амперных характеристик:

а — двух резисторов (гипотетический резистор 2 обладает при токе  $I_0$  “бесконечно” большим дифференциальным сопротивлением);

б — цепи из двух последовательно соединенных резисторов, чьи характеристики представлены на рис. 5.16, а. За сублинейный участок отвечает резистор 2, превращающийся при токе  $I_0$  в идеальный проводник. “Кривая” (1, 2, 3) на рис. 5.16, б имеет место в режиме “генератора напряжения”, а “кривая” (1', 2', 3') — в режиме “генератора тока”

Понятным становится и то, что происходит при  $J = J_{кр}$ . В образце, который остается идеально проводящим (по условию), восстанавливается концентрация электронов, участвующих в переносе тока. Восстановление концентрации до величины  $n$  происходит при сколь угодно малом превышении ЭДС батареи по сравнению с  $u$ , (см. рис. 5.15), то есть — скачком.

Предположение о зависимости  $n_{св}$  от  $u$  эквивалентно предположению о зависимости  $n_{св}$  от  $V_{др}$ . Действительно, всякий раз давая приращение ЭДС  $\delta u$ , мы порождаем в сверхпроводнике начальное поле, которое, убывая затем до нуля, увеличивает дрейфовую скорость (в соответствии с формулой (1.155)) на величину

$$\delta V_{др} = \frac{|q|}{m} \cdot \int_0^{\infty} \mathcal{E}(t) \cdot dt = \frac{|q|}{m} \cdot \frac{\delta u}{L + 2L_p} \cdot \tau_{\sigma}, \quad (5.92)$$

где  $\tau_{\sigma}$  — характерное время затухания поля.

Таким образом,

$$V_{др}(u) = \frac{|q|}{m} \cdot \frac{\tau_{\sigma}}{L + 2L_p} \cdot u. \quad (5.93)$$

Подчеркнем, что такое определение дрейфовой скорости всего коллектива требует либо приписать каждому электрону, участвующему в дрейфе, нулевую среднюю скорость в бестоковом состоянии (как мы знаем, это справедливо для сверхпроводящих электронов), либо считать распределение всех электронов по скоростям в бестоковом состоянии сферически симметричным<sup>1)</sup>.

Заметим, что дрейфовая скорость не зависит от концентрации электронов, вовлекаемых полем в дрейф. Учитывая, что в рассматриваемом примере размеры образца и резисторов подобраны так, чтобы скорость  $V_{др}$  была одинаковой во всех элементах цепи, а также и то, что, по определению,

$$\vec{J} = q \cdot n_{св} \cdot \vec{V}_{др},$$

единственной причиной для сублинейной зависимости  $J(V_{др})$  может быть только уменьшение концентрации способных принимать участие в токе электронов ( $n_{св}$ ) с ростом  $V_{др}$  (рис. 5.17).

Если предположить, что по достижении дрейфовой скоростью величины, соответствующей именно  $J_{кр}$ , происходит переход металла из сверхпроводящей фазы в нормальную, все электроны металла должны превратиться в обычные свободные электроны, способные участвовать в создании тока.

Мы ранее условились, что в исследуемом образце металла нет дефектов, находится он при температуре  $T = 0$  и потому является идеальным проводником. Значит, для увеличения тока в нем на конечную величину (а именно это происходит за время фазового перехода) необходимо возникновение (а в дальнейшем — затухание) электрического поля конечной величины). Однако мы “видели”, что для скачка тока было достаточно сколь угодно малого приращения ЭДС  $\delta u$  (рис. 5.15).

<sup>1)</sup> В последнем случае плотностью тока следует считать попросту отношение  $I/S$  (см. гл. 2).

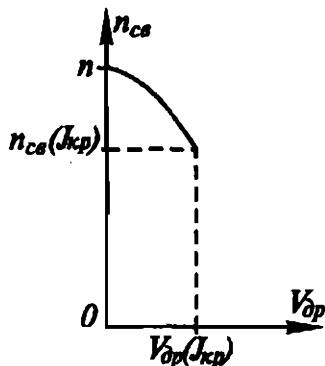


Рис. 5.17. Предполагаемая зависимость  $n_{св}(V_{др})$ . По условию  $n_{св}(J_{кр})$  лишь немногим меньше величины  $n$

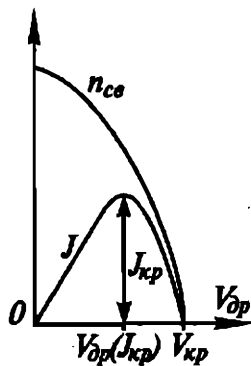


Рис. 5.18. Предполагаемая зависимость  $n_{св}(V_{др})$  и соответствующая ей зависимость  $J(V_{др})$

Представленные на рис. 5.18 и 5.19 зависимости  $n_{св}(V_{др})$ ,  $J(V_{др})$ ,  $n_{св}(t)$ ,  $n_n(t)$ ,  $\epsilon(t)$ ,  $V_{др}(t)$ ,  $J(t)$  призваны сделать убедительной версию, описывающую кинетику фазового перехода.

Итак, предполагается, что  $n_{св}$  убывает до нуля при  $V_{др} = V_{кр}$ , причем  $V_{кр}$  существенно (а не сколь угодно мало) превышает ту величину, каковая соответствовала  $J_{кр}$ . Естественно, что кривая  $J(V_{др}) = = |q| n_{св} \cdot V_{др}$  должна тогда иметь максимум, которому отвечает скорость  $V_{др}(J_{кр})$ .

Теперь обратимся к рис. 5.19. Пусть в момент времени, принятый за начало отсчета, в образце возникло поле  $\delta\epsilon$ , за счет малого прироста ЭДС  $\delta u$  к величине  $u_0$ . Если бы при дальнейших рассуждениях можно было обратиться к рис. 5.18 (на котором представлены стационарные зависимости), следовало бы констатировать, что прирост  $u$  вызовет прирост  $V_{др}$ , из-за чего (согласно рис. 5.18) ток в образце (и во всей цепи) уменьшится. В свою очередь из-за этого поле внутри нашего идеального проводника вместо того, чтобы уменьшиться, возрастет. Это вызовет дальнейший прирост  $V_{др}$ ; тогда ток согласно рис. 5.18, еще сильнее уменьшится и т.п. Кроме того будет происходить уменьшение числа сверхпроводящих электронов до нуля. За конечное небольшое время идеальный проводник превратится в идеальный изолятор. В момент, когда  $n_{св}$  станет равной

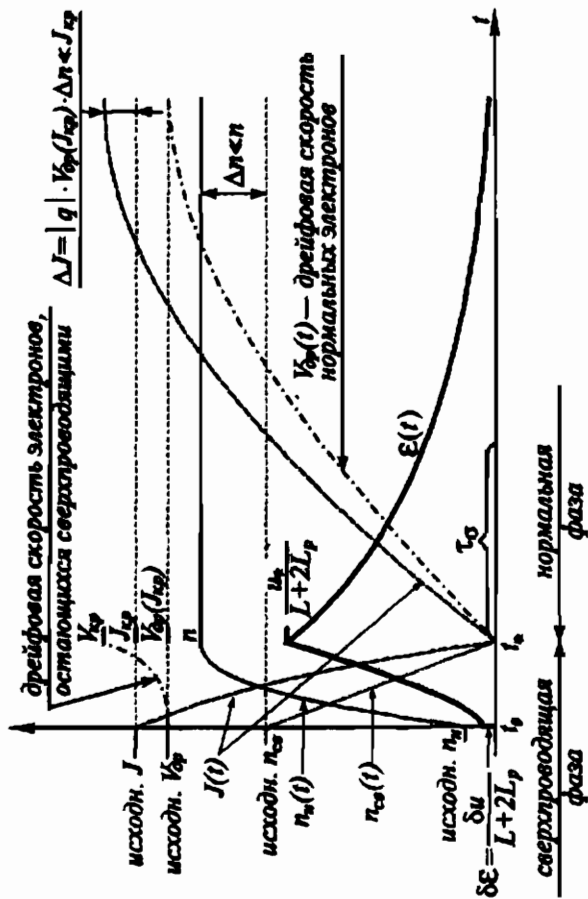


Рис. 5.19. Переходный процесс.

Согласно рис. 5.17,  $n_n (J = J_{cp}) \ll n$ . Поэтому во включение в дрейф ничтожного числа нормальных электронов, существовавших на момент  $t_0$ , лишь слегка замедлит стремительный спад тока, который происходит за счет уменьшения величины  $n_{cp}$ . На одно мгновение (момент  $t_c$ ) образец превращается в изолятор. За время  $(t_c - t_0)$  происходит восстановление концентрации нормальных электронов до величины  $n$  и возрастание поля в образце до величины, которой соответствовала скорость  $V_D (J_{cp})$ . За время порядка нескольких  $\tau_c$  происходит восстановление дрейфовой скорости до величины  $V_D (J_{cp})$ .

нулю, поле в образце достигнет того самого значения  $\frac{u_0}{L + 2L_p}$ , которому уже отвечала дрейфовая скорость (величина  $V_{др} (J_{кр})$ ). И в этот же момент все электроны станут нормальными, способными участвовать в дрейфе. Если допустить, что в этот момент распределение их по скоростям оказывается сферически симметричным, и вспомнить, что по условию металл остается идеально проводящим, легко согласиться с тем, что дрейфовая скорость уже нормальных электронов начнет нарастать, причем вновь до прежней (отвечающей полю, равному  $\frac{u_0}{L + 2L_p}$ ) величины  $V_{др} (J_{кр})$ . Начнет нарастать и плотность тока, только теперь

$$\vec{J}(t) = q \cdot n \cdot \vec{V}_{др}(t) \quad \text{и} \quad \vec{J}(t \rightarrow \infty) = q \cdot n \cdot \vec{V}_{др},$$

а не как до фазового перехода, когда

$$\vec{J}(t \rightarrow \infty) = q \cdot n_{св}(V_{др}) \cdot \vec{V}_{др}.$$

Электрическое поле, как и должно быть в идеальном проводнике, будет убывать до нуля.

Поскольку весь процесс происходит очень быстро, на зависимости  $J(u)$ , получаемой с помощью амперметра и вольтметра постоянного тока, появляется скачок тока.

Понятно, что, если удастся установить зависимость  $n_{св}(V_{др})$ , можно будет легко вычислить величину  $J_{кр}$ .

Допустим, что изложенная версия и в самом деле истинна. Однако совершенно очевидно, что она покоится на четырех предположениях.

Первое состоит в том, что нормальные электроны рождаются за время существования в сверхпроводнике электрического поля (за то же время происходит и приращение дрейфовой скорости электронов, остающихся сверхпроводящими и, следовательно, участвующи-

1) Здесь  $\vec{V}_{др}(t)$  — мгновенное, а не стационарное ( $\vec{V}_{др}$ ) значение дрейфовой скорости. Кстати напомним, что, говоря о плотности тока идеального нормального металла, мы имеем в виду просто ток, деленный на площадь поперечного сечения (см. гл. 2).



ми в токе). Таким образом, число нормальных электронов растет от нуля до  $n$  в ходе последовательных приращений  $V_{др}$  от нуля до  $V_{кр}$ .

Второе предположение состоит в том, что хотя каждый ( $i$ -й) нормальный электрон рождается в состоянии с достаточно большой скоростью  $\vec{V}_i (V_i = V_F)$ , весь их коллектив, если и создает ток, то — совершенно ничтожный. Другими словами, неравенство

$$\left| \sum_i \vec{V}_i \right| \ll V_{др} (J_{кр})$$

оказывается для нормальных электронов справедливым в любой момент времени из интервала  $t_0 \leq t \leq t_*$ , несмотря на существование поля (рис. 5.20). Тем самым оправдывается обращение к стационарной зависимости на рис. 5.18.

Третье предположение состоит в том, что нормальные электроны, уже существующие к моменту очередного увеличения ЭДС, следовательно, очередного возникновения поля и безусловно вовлекаемые этим полем в дрейф, из дрейфа после затухания поля выключаются. И это, несмотря на отсутствие каких бы то ни было дефектов!

Четвертое предположение состоит в том, что нормальные электроны, почему-то не превращаются в сверхпроводящие после исчезновения поля, хотя они и в дрейфе не участвуют, и рассеиваться им, казалось бы, не на чем.

Попробуем обосновать все четыре предположения.

### 5.5.3. Появление нормальных электронов в сверхпроводнике (Обоснование первых двух предположений)

Можно попытаться объяснить, каким образом под действием электрического поля появляются в сверхпроводнике нормальные электроны, используя выдвинутую в п. 1.5.5 гипотезу. Согласно последней сверхпроводящие электроны в исходном (бестоковом) состоянии “колеблются”, будучи все — связанными “пружинками”<sup>1)</sup>. При

1) Хорошо известная модель ионного остова кристалла состоит в том, что все ионы, будучи связанными друг с другом “электронными пружинками” (двигающимися электронами), хаотично колеблются около своих положений равновесия. Вполне возможно представить себе электроны, которые колеблются около своих положений равновесия. При этом роль пружинок играют колеблющиеся ионы.

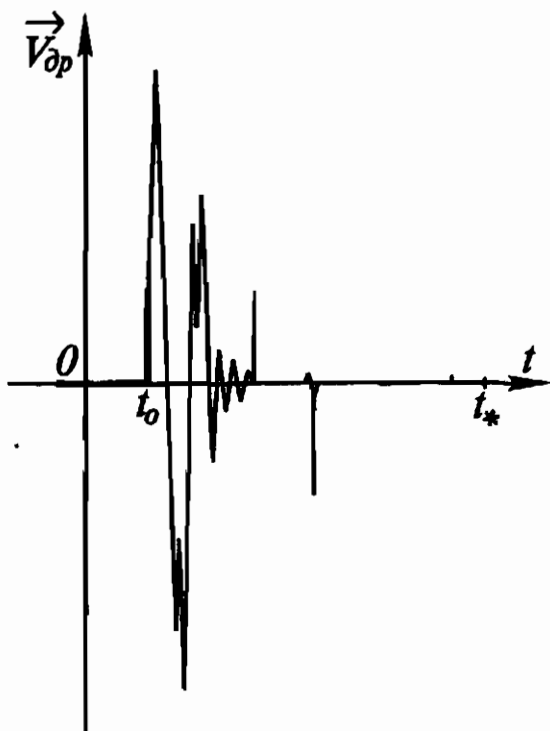


Рис. 5.20. Характер затухания скорости дрейфа.

Изменение составляющей (вдоль оси  $x$ ) дрейфовой скорости коллектива нормальных электронов (существовавших к моменту  $t_0$  и вновь возникающих) на 1-й стадии переходного процесса носит беспорядочный характер. Однако «амплитуды» колебаний стремительно затухают. В дальнейшем возникают лишь очень редкие мгновенные «выбросы» скорости.

Дрейфовая скорость определяется выражением 
$$\vec{V}_{др}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{n}(\vec{V}_i, t) \cdot \vec{V}_i.$$

В первое мгновение (после  $t_0$ ) результирующая (дрейфовая) скорость группы уже существовавших нормальных электронов исчезающе мала ( $\sim [t - t_0]$ ). Поэтому даже один вновь возникший электрон, обладая огромной скоростью ( $\sim V_F$ ), может создать дрейф в любом направлении.

этом следует учесть, что коррелированным является движение лишь каждых двух электронов, которые образуют конкретную пару. Колебание же электрона-партнера одной из множества пар (связанных друг с другом) совершенно не скоррелировано с колебанием электрона-партнера другой пары.

Если посчитать элементарным носителем заряда не электрон, а куперовскую электронную пару<sup>1)</sup> с зарядом  $2q$  и массой  $2m$ , придется сказать, что все связанные пары колеблются друг относительно друга и относительно ионного остова образца хаотично.

Конечно, “пружинки” призваны просто дать наглядное представление о связи друг с другом не только электронов каждой в отдельности пары, но и электронов всех пар — посредством взаимодействия их с колеблющимися ионами кристалла: колеблющимися — подчеркнем — даже при  $T = 0$ . А вот подобное взаимодействие уже вполне реально. И потому не должен вызывать удивление тот факт, что вмешательство внешнего возмущения в электрон-ионное взаимодействие, (осуществляемое, если можно так выразиться, со стороны электронов) приводит к рождению нормальных частиц. Ведь при нагреве сверхпроводника тоже происходит вмешательство в электрон-ионное взаимодействие, только со стороны решетки, а оно, мы знаем, определенно приводит к рождению нормальных электронов. Но в процессе включения электрического поля (и нарастания тока от одного стационарного значения, например нулевого, до другого) испытывают силовое воздействие электроны во всех точках образца и притом одновременно. Именно в этом состоит принципиальное отличие воздействия внешнего возмущения от случайных актов рассеяния.

На языке “пружинок” силовое воздействие означает деформацию всех “пружинок” одновременно<sup>2)</sup>. Но коль скоро связанные “пружинками” электронные пары колеблются хаотично, между величинами и знаками натяжений “пружинок” в разные моменты времени и в разных местах тоже нет никаких корреляций. Это означает, что запасаемая от поля энергия перераспределяется между “пружинками” совершенно случайным образом. В результате какие-то “пружинки” могут лопнуть, и тогда какие-то связанные (взаимодей-

1) Образованную коррелированными электронами.

2) Аналогично влияет нагрев образца (см. начало §5.4).

ствующие) электроны превратятся в нормальные. В сущности, мы предполагаем, что энергия направленного движения (дрейфа) преобразуется в энергию возбуждения связей точь-в-точь так же, как преобразуется в тепловые возбуждения тепловая энергия, подводимая к образцу от термостата через поверхность раздела. Другими словами, действие электрического поля вызывает не только дрейф сверхпроводящих электронов, но и “разогрев” электронного газа, означающий заполнение части состояний  $\vec{V}$ -пространства теми же одиночными электронами и двухэлектронными возбуждениями, о которых шла речь в §5.3.

(Заметим, что поскольку энергия возбужденной пары, иначе говоря — двухэлектронного возбуждения, и энергия двух отдельных нормальных электронов одинаковы (см. §5.3), для разъединения пары на две частицы нужна уже бесконечно малая энергия. Поэтому далее будем говорить только о нормальных электронах сверхпроводника и тех его сверхпроводящих электронах, которые остаются в невозбужденном состоянии).

Тот факт, что энергия, запасаемая связанными — сверхпроводящими — электронами, перераспределяется между ними именно случайным образом, служит обоснованием сделанного в конце п. 5.5.2 второго предположения. В самом деле, если, разрывая связи, электрическое поле разбрасывает электроны по состояниям  $\vec{V}$ -пространства как попало, то в первые мгновения существования поля результирующий ток небольшой части электронов, ставших за это время нормальными, может оказаться каким угодно по величине и направлению. Учтем, однако, что, хотя прирост поля, начавшийся в момент  $t_0$  (рис. 5.19), продолжается очень недолго, за этот промежуток времени  $(t - t_0)$  успевают развязаться друг с другом все электроны проводимости образца — огромное количество. И все они будут заполнять состояния в  $\vec{V}$ -пространстве случайным образом. Сопоставив быстрый рост заполняемых  $\vec{V}$ -состояний со случайным характером заполнения, нетрудно придти к выводу, что ток нормальных электронов, флуктуируя во времени, будет стремительно убывать.<sup>1)</sup>

Грубо говоря, спустя мгновение после момента  $t_0$  и почти на всем протяжении времени вплоть до  $t$ , распределение нормальных элект-

---

1) Столь же стремительно будут убывать и сами флуктуации результирующего тока.

тронов по  $\vec{V}$ -состояниям будет выглядеть практически сферически симметричным<sup>1)</sup>. Тогда в интервале  $t_0 < t < t_*$  результирующий ток (плотностью  $J$ , см. рис. 5.19) будет переноситься только сверхпроводящими электронами. Он будет убывать столь же стремительно, сколь быстро будет расти число нормальных частиц.

#### 5.5.4. Обоснование остальных предположений

Поведение свободного электрона нормального металла очень сильно отличается от поведения нормального электрона сверхпроводника.

В рамках адиабатического приближения свободный электрон нормального металла после того, как ему приписана эффективная масса, считается вообще не взаимодействующим с ионами, образующими кристаллическую решетку. В стационарном состоянии он либо покоится (находится в состоянии, например, на дне зоны проводимости, в котором  $\langle \vec{V} \rangle_t = 0$ ), либо движется прямолинейно и равномерно (в образце бесконечно больших размеров). Совершеннейшую нереалистичность подобного представления об электронах зоны проводимости реального нормального металла компенсирует допущение о случайных актах рассеяния свободного электрона на дефектах, входящих в состав решетки: ионах примеси, структурных нарушениях, фононах. Именно им передаются импульс и энергия, приобретенные коллективом свободных электронов, например, от поля после его исчезновения. Поскольку же дефекты — часть решетки, находящейся в контакте с термостатом, к нему в конце концов переходит импульс и энергия. При отсутствии в нормальном металле-элементе электрической цепи дефектов все свободные электроны должны были бы продолжать после исчезновения поля двигаться по инерции, так что импульс и энергия, полученные от поля, остались бы в коллективе.

Совершенно иная ситуация в бездефектном сверхпроводнике. Все те электроны, которые мы называем сверхпроводящими, связаны друг с другом через посредство колеблющихся ионов решетки, и по-

<sup>1)</sup> Все более симметризуясь с течением времени. В момент  $t_*$ , когда  $n_{cB} = 0$ , распределение нормальных электронов становится наиболее симметричным, а их ток — наименьшим.

тому адиабатическое приближение для них неприемлемо. Однако оно неприемлемо и для нормальных электронов сверхпроводника.<sup>1)</sup>

В самом деле, каким образом сверхпроводящий элемент цепи, в котором за время действия поля возник ток и появились нормальные электроны, может быть возвращен в исходное бестоковое состояние, в котором нет также и нормальных частиц? Ток внутри идеального проводника пропадает в течение переходного процесса после разрыва цепи. Что же касается нормальных частиц, то они могут превратиться в связанные друг с другом (сверхпроводящие) только посредством взаимодействия каждого из нормальных частиц с решеткой.

Каждый из электронов сверхпроводника (по крайней мере, находящихся в фермиевских состояниях) постоянно взаимодействует с решеткой. Только результаты взаимодействия различны. В одних случаях два электрона, оказавшиеся в состояниях  $\vec{V}_i$  и  $\vec{V}_j$  (таких, что  $\vec{V}_i + \vec{V}_j \neq 0$ ) переходят (не обязательно одновременно) в два состояния  $\vec{V}_k$  и  $\vec{V}_l$  ( $\vec{V}_k + \vec{V}_l \neq 0$ ). В других случаях происходят переходы из спаренного состояния  $(\vec{V}_m, -\vec{V}_m)$  в спаренное же  $(\vec{V}_p, -\vec{V}_p)$ . Могут быть и переходы (одновременные) из состояний  $(\vec{V}_i, \vec{V}_j)$  в состояние  $(\vec{V}_m, -\vec{V}_m)$ .

На рис. 5.21 показано, каким образом нормальные электроны превращаются в сверхпроводящие. Для этого нужно, чтобы отрицательный по знаку матричный элемент  $U_{mp}$  одновременных переходов  $(\vec{V}_m, -\vec{V}_m \rightarrow \vec{V}_p, -\vec{V}_p)$  был по абсолютной величине больше, чем элемент  $U_{ik}$  перехода  $(\vec{V}_i \rightarrow \vec{V}_k)$ . Тогда после случайного акта двух одновременных независимых переходов  $(\vec{V}_i \rightarrow \vec{V}_m)$ ,  $(\vec{V}_j \rightarrow -\vec{V}_m)$  возникает куперовская пара, на разрыв которой уже потребуются энергия извне.

Итак, нормальные электроны сверхпроводника непрерывно взаимодействуют с решеткой, но каждый независимо от остальных. Поэтому они образуют коллектив не связанных друг с другом частиц; воспринимают и отдают импульс и энергию не как единое целое, а каждая частица независимо от остальных.

<sup>1)</sup> Таким образом, адиабатическое приближение вообще непригодно для металла, находящегося в сверхпроводящей фазе.

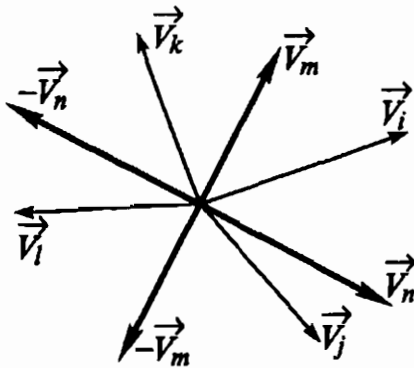


Рис. 5.21. Переходы между состояниями.

Электронный переход  $i \rightarrow k$  совершенно не зависит от перехода  $j \rightarrow l$ , равно как и любого другого перехода, если это одночастичные переходы. Однако случайно происходят такие переходы, в результате которых оба электрона оказываются одновременно в спаренном состоянии  $(\vec{V}_m, -\vec{V}_m)$ . С этого момента электроны становятся связанными партнерами (скорости их остаются

при последующих переходах скоррелированными), ибо матричный элемент перехода  $\vec{V}_m \rightarrow \vec{V}_k$  по модулю на конечную величину меньше чем матричный элемент одновременного перехода  $(\vec{V}_m, -\vec{V}_m) \rightarrow (\vec{V}_n, -\vec{V}_n)$ .

Проследим теперь за реакцией сверхпроводящего элемента цепи на подключение к источнику ЭДС. Подчеркнем, — наш образец будет считаться не содержащим дефектов и находящимся при  $T=0$ .

Пока внутри образца существует электрическое поле, происходит рождение нормальных частиц, причем в те моменты времени, когда уменьшается до соответствующей величины сила связи между какими-то двумя сверхпроводящими электронами. Лишь по чистой случайности — с ничтожной вероятностью — два ставших нормальными электрона могли бы оказаться в момент рождения в состояниях со скоростями именно  $(\vec{V} + \vec{V}_{др})$  и  $(-\vec{V} + \vec{V}_{др})$ , то есть образовать пару, дрейфующую с той же скоростью, что и куперовские пары. Вот почему, если считать, что к концу действия поля возникло  $N$  нормальных частиц, их средняя по коллективу скорость

$$\langle \vec{V} \rangle = \left( \sum_i^N \vec{V}_i \right) \cdot \frac{1}{N} \quad 1)$$

может быть направлена куда угодно и быть какой угодно по величине.

1) См. пп. 2.3.1.3, 2.3.1.4.

Если число  $N$  к моменту  $t_0$  окажется очень большим, ток, образованный коллективом, состоящим уже из одних только нормальных электронов, будет, вероятнее всего, ничтожно мал. Если же нормальные электроны существовали до появления поля, они, конечно, вовлекаются в дрейф, и их средняя — дрейфовая — скорость направлена именно против поля.

Что происходит с этими электронами и возникающими за время существования поля после исчезновения последнего?

Мы уже говорили, что каждый нормальный электрон сверхпроводника взаимодействует с решеткой, причем изменение в акте взаимодействия импульса и энергии одного такого электрона совершенно не зависит от изменения импульса и энергии любого другого электрона. Хорошо известно, что в этом случае после исчезновения внешнего возмущения несимметричное распределение независимо рассеивающихся электронов по состояниям  $\vec{V}$ -пространства будет релаксировать и сферически симметричному, не создающему тока и обладающему наименьшей энергией.

Таким образом, после исчезновения поля в сверхпроводнике — бездефектном и находящимся при  $T=0$  — существуют, но не участвуют в дрейфе нормальные электроны. Двигутся они совершенно хаотично.

Складывается любопытная ситуация: толь-в-толь как если бы при нулевой температуре образца (решетки) газ содержащихся в нем нормальных частиц обладал конечной электронной температурой. При этом в образце течет постоянный ток, переносимый электронами другого — сверхпроводящего — коллектива, движущимися после исчезновения поля по инерции.

Подчеркнем, что присутствие дефектов в образце реального металла не вносит никаких принципиальных изменений в нарисованную картину до тех пор, пока образец остается в сверхпроводящей фазе: дефекты входят в состав решетки, с колебаниями ионов которой нормальные электроны сверхпроводника и без того взаимодействуют<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Что касается свободных электронов нормального металла, то они, согласно адиабатическому приближению, не взаимодействуют с колебаниями решетки при  $T=0$ .



Заметим, что нормальные электроны совершают переходы только между теми состояниями  $\vec{V}$ -пространства, которые не заняты электронами сверхпроводящими, продолжающими участвовать в дрейфе. При этом не исключена вероятность того, что в некоторые моменты времени будут в одинаковой степени заполнены нормальными частицами те — образующие спаренное — состояния ( $\vec{V} + \vec{V}_{др}$ ) и ( $-\vec{V} + \vec{V}_{др}$ ), которые от сверхпроводящих частиц свободны. Тем не менее нормальные электроны не превратятся в связанные — сверхпроводящие: через мгновение они снова перейдут в неспаренные состояния. Если бы нормальные электроны превратились в связанные, изменились бы силы, связывающие сверхпроводящие частицы<sup>1)</sup>. Изменение силы связи (потенциальной энергии взаимодействия) повлекло бы за собой изменение степени заполнения каждого  $\vec{V}$ -состояния сверхпроводящими электронами, которые отвечают за величину и направление плотности тока. Однако любая флуктуация плотности тока в одном элементе цепи приводит к перераспределению поля между всеми элементами, уничтожающему эту флуктуацию<sup>2)</sup>. Как видим, обрамление сверхпроводящего образца резистивными элементами и источником ЭДС<sup>3)</sup> создает стопроцентно отрицательную обратную связь. Вот почему после исчезновения поля исчезает ток нормальных электронов (если он и возникал), но не они сами.

Только разорвав электрическую цепь, мы уничтожим эту обратную связь. Когда после разрыва цепи внутри образца возникает поле, оно будет создано током самих же сверхпроводящих электронов, причем такого направления, что станет тормозить эти электроны. Начнется переходный процесс, в течение которого исчезнут и ток, и поле. Нормальным частицам ничто уже не воспрепятствует превратиться в сверхпроводящие.

### 5.5.5. Зависимости величин $\Delta$ , $n_{св}$ , $J$ от дрейфовой скорости

Чтобы вычислить значение  $J_{кр}$  (см. рис. 5.18), надо располагать зависимостью  $n_{св}(V_{др})$ . Но поскольку нормальные электроны не уча-

1) Следствие кооперативного движения

2) Перераспределение поля означает, что в идеально проводящем элементе оно возникает.

3) Заметим, что в случае диамагнитной реакции достаточно обрамления образца источником внешнего магнитного поля.

ствуют в дрейфе, можно выражение для плотности тока представить в виде

$$\vec{J} = q \cdot (n - n_n) \cdot \vec{V}_{др} \quad (5.94)$$

где  $n_n$  — концентрация нормальных частиц, а  $n = (P_F^3 / 3 \pi^2 \hbar^3)$  — концентрация электронов в зоне проводимости металла.

В таком случае следует искать зависимость  $n_n(V_{др})$ . Обозначив символом  $\tilde{n}(\vec{V}_i)$  степень заполнения  $\vec{V}_i$ -состояния нормальным электроном, выразим концентрацию  $n_n$  следующим образом:

$$n_n = \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{v} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{n}(\vec{V}_i) \right\}. \quad (5.95)$$

$V_i \geq 0$

После этого остается перейти к задаче о нахождении зависимости  $\tilde{n}(\vec{V}_i)$  с учетом дрейфа сверхпроводящих электронов.

Традиционный способ установления вида функции распределения — это минимизация энергии (в нашем случае, казалось бы, полной, поскольку  $T = 0$ ) при двух очевидных дополнительных условиях:

1. Участвия сверхпроводящих электронов в дрейфе;
2. Сохранения неизменным общего числа частиц, несмотря на изменение числа сверхпроводящих электронов из-за вовлечения их в дрейф (из-за превращения части их в электроны нормальные).

Однако на самом деле задача несколько упрощается с одной стороны, но осложняется с другой.

Прежде всего заметим, что выражение для величины  $\tilde{N}(\vec{V}_i)$  — степени заполнения  $\vec{V}_i$ -состояния сверхпроводящим электроном, участвующим в дрейфе со скоростью  $\vec{V}_{др}$  — можно написать сразу:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\vec{V}_i) &= \tilde{N}_0(\vec{V}_i - \vec{V}_{др}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 - \frac{\frac{m}{2} \cdot (\vec{V}_i - \vec{V}_{др})^2 - F_0}{\sqrt{\left[ \frac{m}{2} (\vec{V}_i - \vec{V}_{др})^2 - F_0 \right]^2 + \Delta^2}} \right], \end{aligned} \quad (5.96)$$

где  $\tilde{N}_0$  и  $F_0$  — степень заполнения  $\vec{V}_i$ -состояния и уровень Ферми до вовлечения электронов в дрейф,  $\Delta$  — энергетическая щель, возможно иная, чем при  $\vec{V}_{др} = 0$ .

Формула (5.96) отображает жесткое смещение стационарной функции распределения в  $\vec{V}$ -пространстве на величину  $\vec{V}_{др}$ <sup>1)</sup>. Только так и должно быть: ведь сверхпроводящие электроны, и дрейфуя, остаются связанными друг с другом, а тогда скорость каждого меняется на одинаковую величину.

Учитывая, что даже при критической скорости дрейфа неравенство

$$V_{др} \ll V_i$$

справедливо для любого состояния из интервала фермиевских, в которых только и могут находиться сверхпроводящие электроны<sup>2)</sup>, вполне допустимо пренебречь величиной  $\vec{V}_{др}$  в формуле (5.96) при расчете энергии коллектива с целью определения величины  $\tilde{n}(\vec{V}_i)$ . Поэтому в дальнейшем будем оперировать равновесной функцией

$$\tilde{N}_0(\vec{V}_i) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\frac{m \cdot V_i^2}{2} - F}{\sqrt{\left(\frac{m \cdot V_i^2}{2} - F\right)^2 + \Delta^2}} \right). \quad (5.97)$$

или, что то же самое, функцией

$$\tilde{N}_0(E) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E - F}{\sqrt{(E - F)^2 + \Delta^2}} \right). \quad (5.98)$$

Додрейфовое значение уровня Ферми оставлено в надежде на то, что и величина  $\tilde{n}(\vec{V}_i)$  окажется зависящей от уровня Ферми, как от параметра. Тогда использование прежнего значения  $F$  гарантирует выполнение второго условия: сохранения (неизменности) общего числа частиц.

1) По поводу знака “-” в скобке  $(\vec{V}_i + \vec{V}_{др})$  в формуле (5.96) напомним хорошо известное выражение для функции распределения свободных электронов нормального металла в случае дрейфа:  $\tilde{f}(\vec{V}_i)$ . При  $T = 0$  и ступенчатой равновесной функции  $\tilde{f}_0(\vec{V}_i)$  имеет место равенство  $\tilde{f}(\vec{V}_i) = \tilde{f}_0(\vec{V}_i - \vec{V}_{др})$ .

2) См. §2.8.

Как видим, в будущем выражении для подлежащей минимизации энергии останется лишь одна неизвестная величина —  $\bar{n}(\vec{V}_i)$ . Упрощение, таким образом, налицо. Теперь об осложняющем обстоятельстве. Напомним, что в нашем случае нормальные частицы существуют в образце, находящемся при  $T = 0$ , и потому являются для него избыточными. Их возникновение можно считать следствием протекания тока в образце, формально — следствием нарушения равновесия. Тем не менее неучастие нормальных частиц в дрейфе предопределяет сферически симметричное распределение их в  $\vec{V}$ -пространстве. Если же в добавок использовать при расчете энергии функцию  $\bar{N}_0(\vec{V}_i)$ , кажется непонятным, каким образом войдет  $\vec{V}_{др}$  в степень заполнения  $\bar{n}(\vec{V}_i)$ . А ведь должны соблюдаться два очевидных предельных перехода:

$$\lim_{V_{др} \rightarrow 0} \bar{n}(\vec{V}_i) = 0, \tag{5.99}$$

$$\lim_{\substack{V_{др} \rightarrow V_{кр} \\ V \rightarrow \infty}} \left\{ \frac{4}{v} \sum_{i=1}^{\infty} [1 - 2\bar{n}(\vec{V}_i)] \cdot \bar{N}_0(\vec{V}_i) + \bar{n}(\vec{V}_i) \right\} = n = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad 1) \tag{5.100}$$

из которых прямо следует, что  $\bar{n}(\vec{V}_i)$  обязана зависеть от  $V_{др}$ .

И еще одно обстоятельство, на которое необходимо обратить внимание. Как было сказано в п. 5.5.3, нормальные частицы движутся совершенно хаотично, а потому энтропия их (а вместе с тем и образца) отлична от нуля (положительна). Но тогда нельзя минимизировать полную энергию. Следует минимизировать лишь одну ее часть, исключив другую, которая пропорциональна энтропии. Обозначив символом  $E_*$ , подлежащую минимизации часть энергии, напомним

$$E_* = E_{полн} - p_* \cdot S_*, \quad 2) \tag{5.101}$$

где  $S_*$  — энтропия, а  $p_*$  — коэффициент, который необходимо установить из самостоятельных соображений.

1) В формуле (5.100) учтено “четверкой” присутствие двух электронов с антипараллельными спинами в одном  $\vec{V}$ -состоянии (см. п. 5.4.2.1).

2) Величина  $E_*$ , определяемая выражением (5.101), есть аналог свободной энергии

После всего сказанного вид функции  $\bar{n}(\vec{V}_i)$  можно написать сразу. Расчет ничем не отличался бы от уже проделанного в п. 5.4.2.3. В нашем случае

$$\bar{n}(\vec{V}_i) = \left[ 1 + \exp \frac{\left( \frac{m \cdot V_i^2}{2} - F \right)^2 + \Delta^2}{P_*} \right]^{-1}. \quad (5.102)$$

Видно, что величина  $V_{др}$ , по крайней мере явно, не входит в правую часть.

Теперь необходимо все усилия направить на нахождение коэффициента  $p_*$ . С этой целью сделаем еще один мысленный эксперимент. Возьмем бездефектный образец сверхпроводника, охладим его до  $T = 0$  и включим в электрическую цепь. Доведем скорость  $V_{др}$  до величины, соответствующей плотности тока  $J_{кр}$ . Тогда приобретенная всеми электронами образца энергия будет равна

$$\nu \cdot n \cdot \frac{m}{2} \cdot V_{др}^2 (J_{кр}) = \delta E_1, \quad (5.103)$$

где  $\nu$  — объем образца,  $n$  — полная концентрация электронов. Часть этой энергии останется в коллективе сверхпроводящих частиц, а другая часть превратится в полную энергию частиц нормальных.

Теперь доведем дрейфовую скорость до величины  $V_{кр}$ . В тот момент ( $t_*$  на рис. 5.19), когда все электроны станут свободными, ток в образце исчезнет, щель  $\Delta$  обратится в нуль; сферически симметричная (поскольку  $J = 0$ ) функция распределения свободных электронов при нулевой щели преобразуется в обычную функцию Ферми-Дирака

$$\bar{n}(E_i) = \frac{1}{1 + \exp \frac{E_i - F}{P_*}}, \quad (5.104)$$

в которой, однако, вместо привычного произведения  $k_B \cdot T$  фигурирует искомым коэффициент  $p_*$ . Легко рассчитать, что энергия кол-

лектива свободных электронов, характеризуемых функцией (5.104), превышает на величину

$$\nu \cdot \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{n}{F} \cdot p_*^2 \equiv \delta E_2 \quad (5.105)$$

энергию  $E_0$  коллектива, описываемого ступенчатой функцией ( $p_* = 0$ ) при том же значении  $F$ , что в формуле (5.104).

Теперь обратим внимание на следующие факты.

1. Энергия электронов ( $E_{\text{эл}}$ ) образца, находящегося в нормальной фазе при  $T=0$  и при отсутствии дрейфа, как раз равна  $E_0$ . Поскольку в нормальной фазе энергии решетки  $E_{\text{реш}}$  принимают равной нулю, можно написать:

$$E_{\text{н.фазы}}^{\text{образца}} = E_{\text{эл}}^{\text{н.фазы}} + E_{\text{реш}}^{\text{н.фазы}} = E_{\text{эл}}^{\text{н.фазы}} = E_0. \quad (5.106)$$

2. Если включение электрон-ионного взаимодействия переводит образец в сверхпроводящую фазу, то, как мы знаем,

$$E_{\text{эл}}^{\text{с.фазы}} = E_0 - \frac{G_E(F) \cdot \Delta_0^2}{2} \cdot \nu, \quad (5.107)$$

где  $\Delta_0$  — ширина щели при  $T=0$ ,  $V_{\text{др}}=0$ .

Поскольку электрон-ионное взаимодействие — это взаимодействие, возникающее между двумя подсистемами внутри системы, следует считать, что

$$E_{\text{н.фазы}}^{\text{образца}} = E_{\text{с.фазы}}^{\text{образца}}.$$

Отсюда:

$$E_{\text{реш}}^{\text{с.фазы}} = \frac{G_E(F) \cdot \Delta_0^2}{2} \cdot \nu.$$

3. В момент, непосредственно предшествующий переходу образца из сверхпроводящей фазы в нормальную при достижении скоростью дрейфа значения  $V_{\text{кр}}$ ,

$$E_{\text{эл}}^{\text{образца}}(t_* - 0) = E_0 - \frac{G_E(F) \cdot \Delta_0^2}{2} \cdot \nu + n \cdot \frac{m \cdot V_{\text{кр}}^2}{2} \cdot \nu, \quad (5.108)$$

$$E_{\text{реш}}^{\text{образца}}(t_* - 0) = \frac{G_E(F) \cdot \Delta_0^2}{2} \cdot \nu. \quad (5.109)$$

Мгновение спустя после фазового перехода (пока  $J = 0$ )

$$E_{\text{образца}}^{\text{эл}}(t_* + 0) = \left[ E_0 - \frac{G_E(F) \cdot \Delta_0^2}{2} \cdot v + v \cdot n \cdot \frac{m \cdot V_{\text{кр}}^2}{2} \right] + \\ + \frac{G_E(F) \cdot \Delta_0^2}{2} \cdot v = E_0 + v \cdot n \cdot \frac{m \cdot V_{\text{кр}}^2}{2}, \quad (5.110)$$

$$E_{\text{реш}}^{\text{образца}}(t_* + 0) = \left[ \frac{G_E(F) \cdot \Delta_0^2}{2} \cdot v \right] - \frac{G_E(F) \cdot \Delta_0^2}{2} \cdot v = 0.$$

4. Как следует из сказанного по поводу соотношения (5.105), энергию электронов образца, перешедшего при  $V_{\text{др}} = V_{\text{кр}}$  в нормальную фазу, можно рассчитать по формуле

$$E_{\text{эл}}^{\text{н. фазы}} = E_0 + v \cdot \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{n}{F} \cdot p_*^2. \quad (5.111)$$

Таким образом, можно приравнять друг другу правые части выражений (5.110) и (5.111), откуда, следует, что

$$p_* = \frac{P_F \cdot V_{\text{кр}}}{\pi}.$$

Хотя вполне разумно считать, что  $p_* = \frac{P_F \cdot V_{\text{др}}}{\pi}$  лишь при небольшом отличии  $V_{\text{др}}$  от  $V_{\text{кр}}$ , мы, тем не менее, постулируем, что зависимость

$$p_* = \frac{P_F \cdot V_{\text{др}}}{\pi} \quad (5.112)$$

справедлива во всем интервале  $0 \leq V_{\text{др}} \leq V_{\text{кр}}$ . Подобный постулат можно использовать, если ограничиться в дальнейшем только качественным анализом.

Итак, мы получили для  $\tilde{n}(E_i)$  выражение

$$\tilde{n}(E_i) = \left[ 1 + \exp \frac{\pi \cdot \sqrt{(E_i - F)^2 + \Delta^2}}{P_F \cdot V_{\text{др}}} \right]^{-1}. \quad (5.113)$$

Используя это выражение и принимая для  $\tilde{N}(E_i)$  соотношение (5.98), легко рассчитать зависимость  $\Delta$  от  $V_{\text{др}}$ . Качественно она

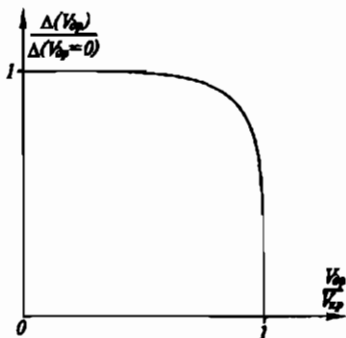


Рис. 5.22. Зависимость параметра  $\Delta$  от величины дрейфовой скорости

ничем не отличается от зависимости  $\Delta(T)$ . Подставим соотношения (5.98) и (5.113) в данное формулой (5.59) определение величины  $\Delta_i$ :

$$\Delta_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \sqrt{\tilde{N}(E_j)} \cdot [1 - \tilde{N}(E_j)] \cdot [1 - 2\tilde{n}(E_j)].$$

Получим

$$\Delta_i = - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \frac{\Delta_j}{\sqrt{(E_j - F)^2 + \Delta_j^2}} \cdot \text{th} \frac{\pi \cdot \sqrt{(E_j - F)^2 + \Delta_j^2}}{P_F \cdot V_{др}}. \quad (5.114)$$

Используя те же приближения, что и при выводе формулы (5.19), получим уравнение для  $\Delta$ :

$$\frac{2}{U_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \text{th} \frac{\pi \cdot \sqrt{(E_i - F)^2 + \Delta^2}}{2 P_F \cdot V_{др}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(E_i - F)^2 + \Delta^2}}. \quad (5.115)$$

На рис. 5.22 представлен график зависимости  $\Delta(V_{др})$ . Видно, что

$$V_{кр} = \frac{\Delta(V_{др}=0)}{1,76 \frac{P_F}{\pi}}. \quad (5.116)$$

Подставляя найденное для определенной  $V_{др}$  значение  $\Delta$  в формуле (5.113), вычислим  $\tilde{n}(E_i)$ , а с ее помощью по формуле (5.95) ве-



личину  $n_n$ . Последнюю и надлежит использовать для получения зависимости  $J(V_{др})$  в соответствии с формулой (5.94). Однако нельзя при этом забывать, что нормальные электроны сверхпроводника обладают своеобразным энергетическим спектром, и нам пришлось подразделить их (см. п. 5.3.3) на две группы: квазиэлектронов и квазидырок. В п. 5.3.8 было также отмечено, что обе группы вносят одинаковый вклад в ток.

По определению, плотность тока (усредненная по всему объему образца) равна

$$\vec{J} = \frac{q}{v} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \vec{V}_i \cdot \tilde{n}(\vec{V}_i) = \frac{q}{v} \sum_{i=0}^{\infty} \vec{V}_i \cdot [\tilde{n}(\vec{V}_i) - \tilde{n}(-\vec{V}_i)], \quad (5.117)$$

где  $\tilde{n}(\vec{V}_i)$  — степень заполнения  $\vec{V}_i$ -состояния носителем заряда  $q$ , участвующим в дрейфе со скоростью  $V_{др}$ .

Если плотность тока  $\vec{J}$  в формуле (5.117) есть, например,  $\vec{J}_{\text{квази эл}}$ , то величина  $\tilde{n}(\vec{V}_i)$  относится к квазиэлектронам, и для бездефектного сверхпроводника, находящегося при  $T = 0$  равна

$$\tilde{n}(\vec{V}_i) = \left[ 1 + \exp \frac{\pi \cdot \sqrt{\left[ \frac{m}{2} \cdot (\vec{V}_i + \vec{V}_{др})^2 - F \right]^2 + \Delta^2 (V_{др})}}{P_F \cdot V_{др}} \right]^{-1}. \quad (5.118)$$

Заметим, что воспользоваться хрестоматийным представлением типа

$$\tilde{n}(\vec{V}_i) = \tilde{n}_0(\vec{V}_i) - \frac{d\tilde{n}_0}{d\vec{V}_i} \cdot \vec{V}_{др} \quad (5.119)$$

(где  $\tilde{n}_0$  — равновесная — в отсутствие дрейфа — степень заполнения) нельзя, если не соблюдается неравенство

$$\frac{d\tilde{n}_0}{d\vec{V}_i} \cdot \vec{V}_{др} \ll \tilde{n}_0 \quad (\text{или} \quad \frac{d\tilde{n}}{d\vec{V}_i} \cdot \vec{V}_{др} \ll \tilde{n}).$$

В нашем случае оно-то как раз и не соблюдается, что вынуждает остановиться на формуле (5.117). Но тогда, учитывая характер зависимости  $\tilde{n}_0(\vec{V}_i)$ , выраженный соотношением (5.118), очевидно, что мы обрекаем себя на очень громоздкий расчет.

Попытаться избежать подобной перспективы можно, используя для  $\tilde{n}_0(\vec{V}_i)$  какое-то правдоподобное и вместе с тем простое представление. И хотя в этом случае нам придется ограничить себя в дальнейшем только качественным анализом<sup>1)</sup>, его будет вполне достаточно для демонстрации основных выводов теории.

Покажем сначала, как вычислить плотность тока, создаваемого коллективом свободных электронов нормального металла, представляя этот коллектив состоящим из квазиэлектронов (их энергия  $E \geq F$ ) и квазидырок (их энергия  $E \leq F$ ).

Исходя из определения (5.117) и разложения неравновесной степени заполнения состояния свободным электроном (5.119), получаем:

$$\vec{J} = \frac{q}{v} \cdot \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \vec{V}_i \cdot \tilde{n}_0(\vec{V}_i) - \vec{V}_{др} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left( \vec{1}_x \cdot V_{x,i} + \vec{1}_y \cdot V_{y,i} + \vec{1}_z \cdot V_{z,i} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \vec{1}_x \cdot \frac{d\tilde{n}_0}{dV_{x,i}} + \vec{1}_y \cdot \frac{d\tilde{n}_0}{dV_{y,i}} + \vec{1}_z \cdot \frac{d\tilde{n}_0}{dV_{z,i}} \right) \right\}, \quad (5.120)$$

где  $\vec{1}_{x,y,z}$  — соответствующий единичный вектор-орт.

Первая сумма в (5.120) равна нулю.

Пусть, например, скорость  $\vec{V}_{др}$  направлена вдоль оси  $x$ . Тогда во второй сумме отличным от нуля останется только первое слагаемое и

$$\vec{J} = -\frac{q}{v} \cdot \vec{V}_{др} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial V_{z,i}} V_{x,i}. \quad (5.121)$$

Переходя от суммирования к интегрированию, получаем:

$$\vec{J} = -q \cdot \vec{V}_{др} \cdot \int_{V_x, V_y, V_z} G_{\vec{V}}(\vec{V}) \cdot dV_x \cdot dV_y \cdot dV_z \cdot V_x \cdot \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial V_x} = \\ = -q \cdot \vec{V}_{др} \cdot \int_0^{\infty} G_E(E) \cdot dE \cdot V_x \cdot \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial V_x}. \quad (5.122)$$

1) Напомним, что, распространив соотношение (5.112) на интервал  $0 \leq V_{др} \leq V_{кр}$ , мы тем самым сделали выражение (5.118) уже пригодным лишь для качественного анализа.

Совершая преобразование

$$V_x \cdot \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial V_x} = V_x \cdot \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial V_x} = V_x \cdot \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial E} \cdot m \cdot V_x = m \cdot V_x^2 \cdot \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial E}$$

и учитывая, что

$$\frac{m}{2} (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = \frac{m}{2} \cdot 3 V_x^2 = \frac{m}{2} \cdot 3 V_y^2 = \frac{m}{2} \cdot 3 V_z^2 = \frac{m \cdot V^2}{2} = E,$$

получаем

$$V_x \cdot \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial V_x} = \frac{2}{3} E \cdot \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial E},$$

и тогда

$$\vec{J} = -\frac{2}{3} q \cdot \vec{V}_{др} \cdot \int_{\tilde{n}_0(E=0)}^{\tilde{n}_0(E=\infty)} G_E(E) \cdot E \cdot d\tilde{n}_0(E). \quad (5.123)$$

Если, как обычно,

$$G_E(E) = \text{const} \cdot E^{1/2}; \quad \tilde{n}_0(E \rightarrow \infty) \rightarrow 0; \quad \tilde{n}_0(E=0) = 1,$$

интегрирование по частям дает:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{n}_0(E=0)}^{\tilde{n}_0(E=\infty)} G_E(E) \cdot E \cdot d\tilde{n}_0(E) &= G_E(E) \cdot E \cdot d\tilde{n}_0(E) \Big|_{E=0}^{E=\infty} - \int_0^{\infty} G_E(E) \cdot \tilde{n}_0(E) \cdot dE - \\ &- \int_0^{\infty} E \cdot \tilde{n}_0(E) \cdot \frac{dG_E(E)}{dE} \cdot dE = 0 - n - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G_E(E) \cdot \tilde{n}_0(E) \cdot dE = -\frac{3}{2} n. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Здесь  $n = \int_0^{\infty} G_E(E) \cdot \tilde{n}_0(E) \cdot dE$  — по определению, полная концентрация электронов в зоне проводимости металла.

Подставляя значение интеграла (5.124) в формулу (5.123), получаем хорошо известное выражение:

$$\vec{J} = q \cdot n \cdot \vec{V}_{др}.$$

Теперь придем к этому же выражению, представляя коллектив свободных электронов состоящим из квазиэлектронов и квазидырок и считая, что обе группировки создают одинаковый ток. Так как энергия квазиэлектронов превышает уровень Ферми, создаваемую ими плотность тока запишем, используя формулу (5.123) в виде:

$$\vec{J}_{\text{квази эл}} = \frac{2}{3} q \cdot \vec{V}_{\text{др}} \cdot \int_{\tilde{n}_0(E=F)}^{\tilde{n}_0(E=\infty)} G_E(E) \cdot E \cdot d\tilde{n}_0(E). \quad (5.125)$$

Поскольку  $\tilde{n}_0$  убывает с ростом  $E$  гораздо быстрее, чем меняется (растет) произведение  $G_E(E) \cdot E$ , допустимо представить интеграл в виде:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{n}_0(E=F)}^{\tilde{n}_0(E=\infty)} G_E(E) \cdot E \cdot d\tilde{n}_0(E) &= \int_{\tilde{n}_0(F)}^{\tilde{n}_0(F+\zeta)} G_E(E) \cdot E \cdot d\tilde{n}_0(E) = \\ &= \int_{\tilde{n}_0(F+\zeta)}^{\tilde{n}_0(E=\infty)} G_E(E) \cdot E \cdot d\tilde{n}_0(E), \end{aligned} \quad (5.126)$$

где энергия  $F + \zeta$  выбрана специально такой, чтобы второе слагаемое оказалось очень малым по сравнению с первым. Допустим, что при этом

$$\zeta \ll F, \text{ но } \tilde{n}_0(E = F + \zeta) \ll \tilde{n}_0(E = F).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{n}_0(F)}^{\tilde{n}_0(E=\infty)} G_E(E) \cdot E \cdot d\tilde{n}_0(E) &= \int_{\tilde{n}_0(F)}^{\tilde{n}_0(F+\zeta)} G_E(E) \cdot E \cdot d\tilde{n}_0(E) = \\ &= G_E(E) \cdot F \cdot [\tilde{n}_0(F+\zeta) - \tilde{n}_0(F)] = -G_E(F) \cdot F \cdot \tilde{n}_0(F). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Подставляя значение интеграла (5.127) в (5.125) и вспоминая, что для свободного электрона нормального металла

$$\tilde{n}_0(F) = \frac{1}{2}; \quad G_E(F) \cdot F = \frac{3}{2} n,$$

приходим к окончательным выражениям:

$$\vec{J}_{\text{квази эл}} = -\frac{2}{3} q \cdot \vec{V}_{\text{др}} \cdot \left( -\frac{3}{2} n \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} q \cdot n \cdot \vec{V}_{\text{др}},$$

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{квази эл}} + \vec{J}_{\text{квази дыр}} = 2 \vec{J}_{\text{квази эл}} = q \cdot n \cdot \vec{V}_{\text{др}}.$$

Все, что было проделано выше, имеет прямое отношение к расчету плотности тока нормальных электронов сверхпроводника.

Прежде всего уйдем от формулы (5.119) и примем для степени заполнения состояния квазиэлектронов в условиях дрейфа выражение такое (типа (5.118)), чтобы можно было ввести представление о равновесной степени заполнения (о сферически симметричной функции):

$$\left( 1 + \exp \frac{\pi \cdot \sqrt{(E_i - F)^2 + \Delta^2 (V_{\text{др}})}}{P_F \cdot V_{\text{др}}} \right)^{-1} \equiv \tilde{n}_0(E_i) = \bar{n}_0 \left( V_i = \sqrt{\frac{2 E_i}{m}} \right). \quad (5.128)$$

Далее воспользуемся тем обстоятельством, что нормальные электроны сверхпроводника рождаются в состояниях с энергиями

$$F - \hbar \cdot \omega_D \leq E \leq F + \hbar \cdot \omega_D,$$

а

$$\hbar \cdot \omega_D \ll F.$$

Тогда можно обратиться к формулам (5.125, 5.126, 5.127) и написать:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\text{квази эл}} &= -\frac{2}{3} \cdot q \cdot \vec{V}_{\text{др}} \cdot \frac{\tilde{n}_0(F + \hbar \cdot \omega_D)}{\tilde{n}_0(F)} \int G_E(E) \cdot E \cdot d \tilde{n}_{0, \text{квази эл}}(E) \approx \\ &\approx -\frac{2}{3} \cdot q \cdot \vec{V}_{\text{др}} \cdot G_E(F) \cdot F \cdot \left[ \tilde{n}_0(F + \hbar \cdot \omega_D) - \tilde{n}_0(F) \right] \approx \\ &\approx q \cdot \vec{V}_{\text{др}} \cdot n \cdot \tilde{n}_0(F) = q \cdot \vec{V}_{\text{др}} \cdot n \cdot \frac{1}{1 + \exp \frac{\pi \cdot \Delta (V_{\text{др}})}{P_F \cdot V_{\text{др}}}}. \quad (5.129) \end{aligned}$$

(Согласно формуле (5.128),  $\tilde{n}_0(F + \hbar \cdot \omega_D) \ll \tilde{n}_0(F)$ ).

1) Следует обратить внимание на то, что в этой формуле присутствует именно абсолютное значение вектора  $\vec{V}_{\text{др}}$ .

Так как  $\vec{J}_{\text{квази эл}} = \vec{J}_{\text{квази дыр}}$ , плотность тока, создаваемого обеими группировками (плотность тока нормальных электронов), равна

$$\vec{J}_n = q \cdot \vec{V}_{\text{др}} \cdot n \cdot \frac{2}{1 + \exp \frac{\pi \cdot \Delta(V_{\text{др}})}{P_F \cdot V_{\text{др}}}} = q \cdot \vec{V}_{\text{др}} \cdot n_n. \quad (5.130)$$

Используя соотношение (5.116), представим концентрацию нормальных электронов в виде

$$n_n = n \cdot \frac{2}{1 + \exp \left( 1,76 \frac{\Delta(V_{\text{др}}) / \Delta_0}{V_{\text{др}} / V_{\text{кр}}} \right)} = \begin{cases} 0 & \text{при } V_{\text{др}} = 0, \\ n & \text{при } V_{\text{др}} = V_{\text{кр}}, \text{ т.к. } \Delta(V_{\text{кр}}) = 0. \end{cases}$$

В итоге мы получаем искомую зависимость:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\text{св}} &= q \cdot n_{\text{св}} \cdot \vec{V}_{\text{др}} = q \cdot (n - n_n) \cdot \vec{V}_{\text{др}} = \\ &= q \cdot \vec{V}_{\text{др}} \cdot n \cdot \operatorname{th} \left( 0,88 \frac{\frac{\Delta(V_{\text{др}})}{\Delta_0}}{\frac{V_{\text{др}}}{V_{\text{кр}}}} \right), \end{aligned} \quad (5.131)$$

где

$$n \cdot \operatorname{th} \left( 0,88 \frac{\frac{\Delta(V_{\text{др}})}{\Delta_0}}{\frac{V_{\text{др}}}{V_{\text{кр}}}} \right) \equiv n_{\text{св}}. \quad (5.132)$$

Зависимости  $n_{\text{св}}(V_{\text{др}})$  и  $J_{\text{св}}(V_{\text{др}})$  представлены на рис. 5.23. Из кривой  $J_{\text{св}}(V_{\text{др}})$  следует, что

$$J_{\text{кр}} = 0,6 q \cdot n \cdot V_{\text{кр}}.$$

Подставляя сюда выражение (5.116) для  $V_{\text{кр}}$ , получаем

$$J_{\text{кр}} = q \cdot n \cdot \frac{\Delta_0}{P_F}.$$

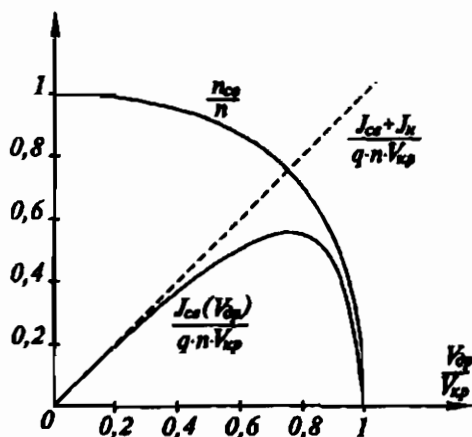


Рис. 5.23. Зависимости плотностей полного тока ( $J_{св} + J_n$ ), его сверхпроводящей составляющей ( $J_{св}$ ) и концентрации сверхпроводящих электронов от дрейфовой скорости (при условии, что нормальные электроны не рассеиваются на дефектах)

Если взять в качестве примера  $n = 3 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ,  $\Delta_0 = 10^{-3} \text{ эВ}$ ,  $P_F = 5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{эВ} \cdot \text{с}}{\text{см}}$ , найдем, что

$$J_{кp} = 10^8 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}.$$

### §5.6. Происхождение плюс-зарядов

В п. 1.5.4 было показано, что правдоподобная гипотеза о природе сверхпроводимости опирается в свою очередь на предположение о связывании сверхпроводящих электронов некими плюс-зарядами, которым мы были вынуждены приписать такие свойства, как:

- способность перемещаться по образцу, причем без сопротивления и, кроме того, туда же, куда — электроны;
- не создавать своего (“парциального”) тока.

В п. 1.5.4 отмечалось, что подобные свойства очень удивительны, и объяснялось, чем именно. Теперь мы в состоянии установить происхождение этих загадочных плюс-зарядов.

Бесспорно, что источником их может быть только кристаллическая решетка — решетка положительно заряженных ионов. Однако если бы ионы решетки образовывали идеально-периодическую конфигурацию, электроны двигались бы в их поле только равномерно и прямолинейно и притом независимо друг от друга. Совсем иная

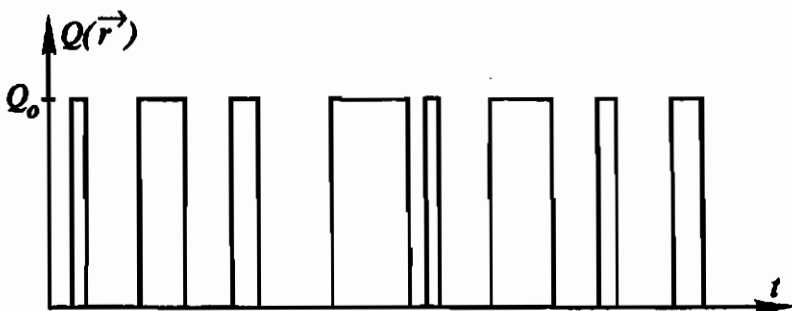


Рис. 5.24. Пример зависимости величины заряда в некоторой точке между узлами решетки от времени.

$Q_0$  — заряд иона,  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки между узлами решетки. Среднее по време-

ни значение заряда в этой точке равно  $\langle Q(\vec{r}) \rangle_t = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} Q(\vec{r}, t) \cdot dt \right\} > 0$

ситуация возникает, если ионы колеблются. Тогда плюс-заряд появляется и в той области пространства (между узлами решетки), где его не могло быть при идеально-периодической конфигурации. (С помощью рис. 5.24 можно понять, как возникает подобный плюс-заряд и чему может быть равно его стационарное значение). Именно к упомянутой области пространства и может притягиваться электрон.

Вполне разумно допустить, что существование положительно заряженной области пространства поддерживается таким движением электрона, которое напоминает движение его в  $S$ -состоянии в центральном поле атомного ядра. Другими словами электрон, раскачивая ионы, как бы индуцирует плюс-заряд в некоторой области пространства, к которой сам же притягивается. Поэтому характер движения электрона изменяется: он более не движется прямолинейно, а постоянно падает в силовой центр, из-за чего средняя скорость электрона обращается в нуль. Спецификой сверхпроводника является лишь то, что среди притягивающихся к плюс-зарядам электронов нет таких, которые в любой момент времени не образовали бы пары с равными и противоположными скоростями.



Поскольку образец представляет собой систему, состоящую только из ионов и электронов, участие электрона еще и в поступательном перемещении не отменяет непрерывного индуцирования им плюс-заряда и притяжения его к последнему. Куда бы ни перемещался электрон, повсюду его окружают ионы, которые он способен раскачать.

Таким образом, плюс-заряды, связывающие все сверхпроводящие электроны, создаются этими же электронами путем раскачивания ионов решетки в любом месте образца.

Возникающее в образце электрическое поле от стороннего источника не препятствует индуцированию плюс-зарядов, но не перемещает сами ионы решетки. Поэтому в присутствии внешнего поля плюс-заряды перемещаются вместе с электронами в том же направлении, а не в противоположном, куда бы стали двигаться свободные положительно заряженные частицы.

Понятно, что “поступательное движение” плюс-зарядов происходит без сопротивления. Ведь на самом деле никакого поступательного движения реальных положительно заряженных частиц — ионов решетки — не происходит. Это обстоятельство объясняет заодно и отсутствие упомянутого в п. 1.5.4 парциального тока плюс-зарядов: по образцу перемещается относительно решетки ионов только отрицательное электричество.

## Глава 6. НЕСПАРЕННЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ<sup>1)</sup>

### §6.1. Предваряющее замечание

В п. 5.3.3 было установлено, что для рождения одной нормальной квазичастицы требуется передать коллективу частиц, взаимодействующих друг с другом, энергию, не меньшую  $\Delta$ :

$$E_{\text{квази}, i} = \sqrt{(E_i - F)^2 + \Delta^2}.$$

В связи с этим возникает вполне уместный вопрос. Возможно ли, чтобы при поглощении сверхпроводником, например, фотона с энергией  $h \cdot \nu_{\phi} \geq \Delta$ , возникла всего лишь одна нормальная квазичастица с энергией  $E_{\text{квази}} \geq h \cdot \nu_{\phi}$ ? Покажем, что это противоречит закону сохранения импульса.

До поглощения фотона импульс коллектива был равен нулю: в каждом ( $i$ -м) спаренном состоянии находились в любой момент два электрона с антипараллельными импульсами

$$m \cdot \vec{V}_i \text{ и } -m \cdot \vec{V}_i.$$

Допустим, что в результате поглощения фотона в состоянии с импульсом  $m \cdot \vec{V}_i$  (или  $-m \cdot \vec{V}_i$ ) оказывается одна квазичастица с энергией

$$E_{\text{квази}, i} = \sqrt{(E_i - F)^2 + \Delta^2},$$

где

$$E_i = \frac{m \cdot V_i^2}{2}.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$h \cdot \nu_{\phi} = \sqrt{(E_i - F)^2 + \Delta^2}; \quad (6.1)$$

согласно закону сохранения импульса,

$$\left( \frac{h \cdot \nu_{\phi}}{\zeta} \right) = m \cdot \vec{V}_i. \quad (6.2)$$

Здесь:  $\left( \frac{h \cdot \nu_{\phi}}{\zeta} \right)$  — импульс фотона,  $\zeta$  — скорость света.

<sup>1)</sup> Это — традиционный термин. На самом деле имеются в виду электроны, не входящие в коллектив частиц, взаимодействующих именно друг с другом.

Возводя в квадрат левые и правые части уравнений (6.1) и (6.2) и сравнивая их, приходим к соотношению

$$(\hbar \cdot v_{\phi})^2 = (E_i - F)^2 + \Delta^2 = m^2 \cdot \zeta^2 \cdot \frac{2 E_i}{m},$$

из которого следует, что условием совместимости обоих законов сохранения является равенство

$$m \cdot \zeta^2 = \frac{(E_i - F)^2 + \Delta^2}{2 E_i}. \quad (6.3)$$

Поскольку, в соответствии с нашими представлениями,

$$F - \hbar \cdot \omega_D \leq E_i \leq F + \hbar \cdot \omega_D,$$

получается, что совместимость друг с другом обоих законов сохранения может иметь место, только если

$$m \cdot \zeta^2 \leq \frac{\hbar^2 \cdot \omega_D^2}{2F}.$$

Разумеется, подобное соотношение нереализуемо, ибо для известных металлов  $m \cdot \zeta^2 > 10^3$  эВ, а  $\frac{\hbar^2 \cdot \omega_D^2}{2F} < 10^{-2}$  эВ. То есть на самом деле вопреки (6.3) справедливо неравенство

$$m \cdot \zeta^2 \gg \frac{(E_i - F)^2 + \Delta^2}{2 E_i}.$$

Как видим, фотон не может породить одну квазичастицу: хотя энергия фотона может быть очень велика, импульс его очень мал (рис. 6.1, а).

Тем не менее фотон с энергией  $\hbar \cdot v_{\phi} = 2 \sqrt{(E_i - F)^2 + \Delta^2}$  может породить две свободные квазичастицы с одинаковыми по модулю импульсами<sup>2)</sup>. В этом случае, согласно закону сохранения энергии,

$$(\hbar \cdot v_{\phi})^2 = 4 [(E_i - F)^2 + \Delta^2], \quad (6.4)$$

1) По той же причине один свободный электрон, движущийся в пустом пространстве, не может поглотить фотон.

2) Или так: фотон с энергией  $\hbar \cdot v_{\phi} = \sqrt{(E_i - F)^2 + \Delta^2} + \sqrt{(E_i - F)^2 + \Delta^2}$  порождает две свободные квазичастицы с очень близкими по модулю импульсами.

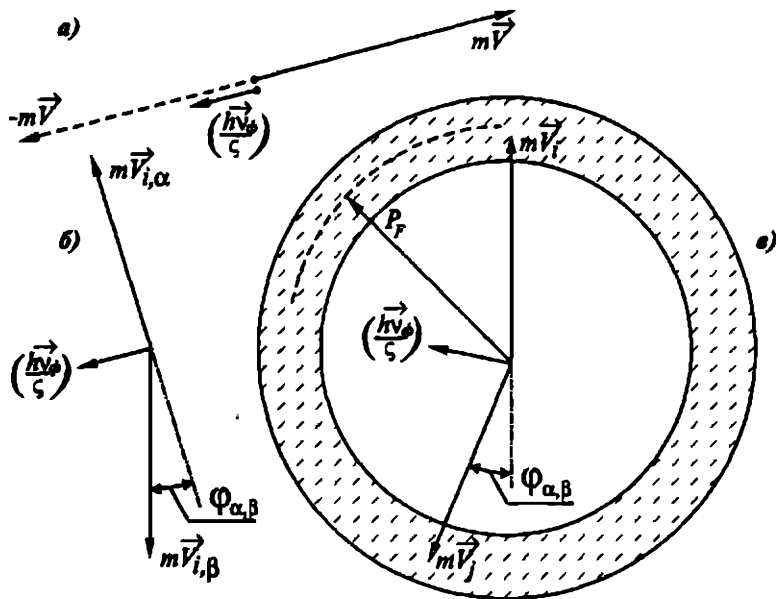


Рис. 6.1. Рождение квазичастиц в результате поглощения фотона с энергией  $\hbar \nu_\phi$  :

*a* — при заполнении спаренного состояния только одной квазичастицей с импульсом  $m \cdot \vec{V}$  закон сохранения импульса будет нарушен даже при наиболее благоприятном

расположении векторов  $m \vec{V}$  и  $\left(\frac{\hbar \cdot \vec{\nu}_\phi}{\varsigma}\right)$ , если импульс электрона по абсолютной величине превосходит импульс фотона;

*б* — при заполнении квазичастицами двух состояний с одинаковыми по модулю импульсами вполне возможно соблюдение закона сохранения импульса:

$$m \cdot (\vec{V}_{i,\alpha} + \vec{V}_{i,\beta}) = \left(\frac{\hbar \cdot \vec{\nu}_\phi}{\varsigma}\right);$$

*в* — в узком сферическом слое фермиевских состояний обязательно найдутся такие два, заполнение которых двумя же квазичастицами произойдет в соответствии с зако-

ном сохранения импульса:  $m \cdot (\vec{V}_j + \vec{V}_j') = \left(\frac{\hbar \cdot \vec{\nu}_\phi}{\varsigma}\right)$

а, согласно закону сохранения импульса,

$$\left(\frac{h \cdot v_{\Phi}}{c}\right)^2 = m^2 \cdot V_{i,\alpha}^2 + m^2 \cdot V_{i,\beta}^2 - 2 m^2 \cdot V_{i,\alpha} \cdot V_{i,\beta} \cdot \cos \varphi_{\alpha, \beta} =$$

$$= 4 E_i \cdot m \cdot (1 - \cos \varphi_{\alpha, \beta}). \quad (6.5)$$

На рис. 6.1, б представлены векторы  $(m \cdot \vec{V}_{i,\alpha})$ ,  $(m \cdot \vec{V}_{i,\beta})$  и импульс фотона. Исключая из уравнений (6.4) и (6.5) величину  $h \cdot v_{\Phi}$ , получаем выражение для  $\cos \varphi_{\alpha, \beta}$ :

$$\cos \varphi_{\alpha, \beta} = 1 - \frac{(E_i - F)^2 + \Delta^2}{m \cdot c^2 \cdot E_i}. \quad (6.6)$$

Поскольку интервал скоростей (импульсов) спаренных состояний представляет собой узкий сферический слой, обязательно найдутся два вектора  $\vec{V}_i$  и  $\vec{V}_j$ , угол между которыми удовлетворяет соотношению (6.6). Соответствующая ситуация представлена на рис. 6.1, в.

Из проведенного анализа очевидно, что сверхпроводник прозрачен для фотонов, частота ( $v_{\Phi}$ ) которых меньше, чем  $\frac{2\Delta}{h}$ . Если же свет поглощается (при этом  $v_{\Phi} > \frac{2\Delta}{h}$ ), то в процессе поглощения происходит генерация и рекомбинация пар нормальных квазичастиц.

Заметим, что в процессе генерации на каждую квазичастицу с энергией  $E_i$ , большей  $F$  (ее называют квазиэлектроном, см. рис. 5.4), должна приходиться квазичастица с энергией  $E_j$ , меньшей  $F$  и такой, чтобы  $F - E_j = E_i - F$  (называемая квазидыркой). В противном случае нарушится тепловое равновесие сверхпроводника с термостатом.

Все сказанное выше очень сильно напоминает картину поглощения света полупроводником. В следующем параграфе мы стараемся развить эту наметившуюся аналогию между сверх- и полупроводником.

### §6.2. Аналогия с полупроводником

Энергетический спектр нормальных квазичастиц сверхпроводника позволяет сформулировать новые понятия, очень удобные для описания многих проявлений сверхпроводимости. В связи с этим важ-

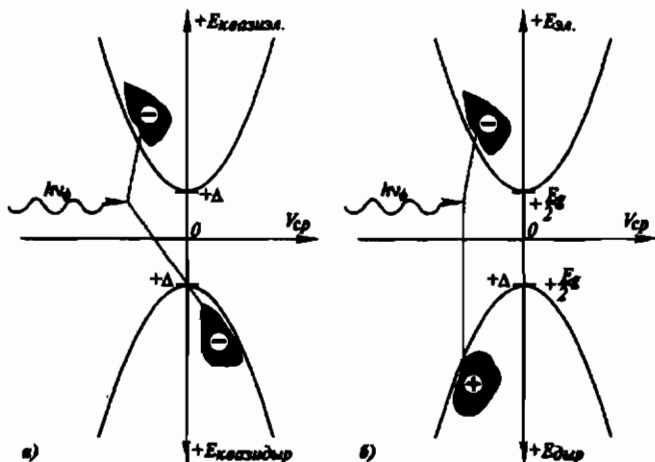


Рис. 6.2. Рождение пары квазичастиц в результате поглощения фотона  
 а — сверхпроводник (заряды обеих квазичастиц, совпадают; для каждой из них  $V_{ср} \neq V_{гн}$ );  
 б — полупроводник (заряды обеих квазичастиц противоположны по знаку; для каждой из них  $V_{ср} = V_{гн}$ )

ное значение приобретает упомянутая в конце §6.1 аналогия с полупроводником, которую мы сейчас рассмотрим.

На рис. 6.2, а, представляющем собой фрагмент рис. 5.4, схематично изображен процесс рождения пары “квазиэлектрон-квазидырка”, например, в результате поглощения фотона. На соседнем рисунке 6.2, б изображен тот же процесс на фоне энергетического спектра полупроводника.

Обратим внимание на следующие обстоятельства. В случае полупроводника (если исключить так называемые процессы переброса) направления векторов мгновенной и средней скорости свободной квазичастицы обязательно совпадают, а абсолютные значения, если и отличаются, то лишь при  $V_{средн} \neq 0$ , и не на много. Решив простоты ради, что энергетические зоны свободных электронов и дырок являются параболическими ( $E \sim V_{мгнов}^2$ ), а изоэнергетические поверхности — сферами в  $\vec{V}$ - (или  $\vec{P}$ -) пространстве, мы тем самым полностью ликвидируем различие между  $\vec{V}_{мгнов}$  и  $\vec{V}_{средн}$ . Тогда с по-

мощью рис. 6.2, б можно установить не только энергии<sup>1)</sup> свободных электронов и дырок, но и их импульсы.

Увы, ничего подобного нельзя сделать в случае сверхпроводника. Напомним, что нормальные квазиэлектрон и квазидырка сверхпроводника взаимодействуют с колебаниями ионов решетки так, что ни в каком приближении нельзя отождествить среднюю скорость с мгновенной. Они могут отличаться не только по величине (причем очень сильно), но и по направлению (см. (5.36)). Однако энергии квазичастиц установить с помощью рис. 6.2, а можно совершенно надежно.

В таком случае имеет смысл перейти к энергетическим диаграммам. Что касается полупроводника, его энергетической диаграммой называется зависимость полной энергии электрона образца от координаты точки образца (который считается уже сплошной средой). На рис. 6.3, а представлена достаточно типичная диаграмма. По установившейся традиции не изображают ни ось энергий (она подразумевается), ни потолок зоны проводимости, ни дно зоны валентной (рис. 6.3, б). Длина горизонтальной линии символизирует длину образца. Зону проводимости ассоциируют с зоной свободных электронов (тогда перемещение электрона вверх означает рост его энергии — кинетической), а валентную зону с зоной свободных дырок (тогда перемещение дырки вниз означает рост ее энергии — также кинетической).

Если под действием внешнего возмущения полупроводник лишь немного отклоняется от термодинамического равновесия с термостатом, допустимо считать, что свободные электроны, как и при равновесии, заполняют уровни энергии на дне и у самого дна зоны проводимости, а свободные дырки — на потолке (такова традиционная терминология) и под самым потолком.

Незанятые дырками энергетические уровни валентной зоны<sup>2)</sup> (а их гораздо больше, чем занятых) заполнены электронами, которые называют “связанными” за то, что они не вносят вклад в явления переноса, в частности, в ток. Заметим, что незанятые электронами

1) Если  $\vec{V}_{\text{мгнов}} = \vec{V}_{\text{средн}}$ , полная энергия квазичастицы совпадает с кинетической.

2) Говоря о занятых и незанятых энергетических уровнях, мы имеем в виду, что степени заполнения их дырками очень сильно отличаются (например, 0,1 и 0,001). Аналогичное замечание относится к уровням зоны проводимости и свободным электронам.

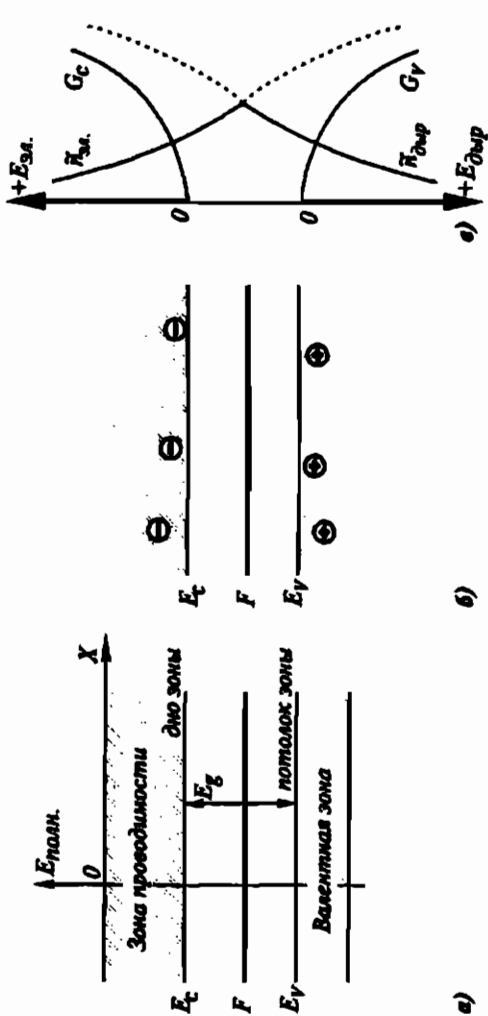


Рис. 6.3. Энергетическая диаграмма полупроводника:

а) подробная диаграмма (полная энергия электрона, находящегося в поле сил притяжения со стороны ионов кристаллической решетки, отрицательна);

б) упрощенная диаграмма;

в) плотности состояний в разрешенных зонах (электронной —  $G_c(E_{\text{эл.}})$  и дырочной —  $G_v(E_{\text{дыр.}})$ ) и степени заполнения состояний (свободными электронами —  $n_{\text{эл.}}$  и свободными дырками —  $n_{\text{дыр.}}$ ;  $n < 1$ )



уровни зоны проводимости вполне логично считать занятыми “свя-  
занными” дырками.

Энергетическая диаграмма полупроводника оказывается очень удобным инструментом анализа явлений перемещения электронов и дырок в пространстве и, в частности, анализа контактных явлений. Однако во всех этих случаях мы знаем, как размещать свободные электроны и дырки по уровням разрешенных энергетических зон — руководствуясь известной плотностью энергетических состояний. Эту величину обычно вычисляют, полностью отождествляя скорости  $\vec{V}_{\text{мгнов}}$  и  $\vec{V}_{\text{средн}}$  для свободных носителей заряда полупроводника. Тогда плотность состояний оказывается равной

$$G_E(E) = \frac{2^{1/2} \cdot m^{3/2} \cdot E^{1/2}}{\pi^2 \cdot \hbar^3} \left( \frac{\text{состояний}}{\text{см}^3 \cdot \text{эВ}} \right), \quad (6.7)$$

где  $E$  — энергия (кинетическая) свободного носителя заряда, причем в качестве нуля отсчета принимается либо дно электронной зоны (зоны проводимости), либо дно дырочной зоны (потолок валентной зоны);  $m$  — эффективная масса носителя заряда.

Тем не менее напомним, что, по определению,

$$G_E(E) = \int_{S_E} \frac{1}{\text{grad}_{\vec{P}_{\text{мгнов}}} E} \cdot \frac{1}{4 \pi^3 \cdot \hbar^3} \cdot d\vec{S}_E, \quad (6.8)$$

где  $d\vec{S}_E$  — элемент изоэнергетической поверхности в пространстве мгновенных импульсов.<sup>1)</sup>

Поскольку (также по определению)

$$\text{grad}_{\vec{P}_{\text{мгнов}}} E = \vec{V}_{\text{средн}},$$

формулу (6.8) целесообразно представить в виде

$$G_E(E) = \frac{1}{4 \pi^3 \cdot \hbar^3} \int_{S_E} \frac{d\vec{S}_E}{\vec{V}_{\text{средн}}}. \quad (6.9)$$

Покажем, как с помощью формулы (6.9) прийти к соотношению (6.7).

<sup>1)</sup> По традиции опускают определение “мгновенный”, говоря о таковом импульсе частиц. Тогда нужно различать два понятия: импульс ( $\vec{P}$ ) и средний импульс ( $\vec{P}_{\text{средн}} = m \cdot \vec{V}_{\text{средн}}$ ).

Для совершенно свободной частицы изоэнергетическая поверхность в  $\vec{P}$ -пространстве — сфера. Поэтому

$$d\vec{S}_E = \left( \frac{\vec{P}}{P} \right) \cdot P^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi,$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  — углы между вектором  $\vec{P}$  и осями координат  $P_z$  и  $P_x$  — соответственно.

Учитывая совпадение величин  $\vec{V}_{\text{средн}}$  и  $\frac{\vec{P}}{m}$  для свободной частицы и то, что  $E = \frac{P^2}{2m}$ , получаем:

$$\begin{aligned} G_E(E) &= \frac{1}{4\pi^3 \cdot \hbar^3} 2 \cdot \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( \frac{P^2}{m} \right) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \\ &= \frac{P \cdot m}{\pi^2 \cdot \hbar^3} = \frac{2^{1/2} \cdot m^{3/2} \cdot E^{1/2}}{\pi^2 \cdot \hbar^3}. \end{aligned}$$

Теперь обратимся к сверхпроводнику. Для вывода зависимости  $G_E$  от  $E_{\text{квази}}$  воспользуемся формулой (5.36), которую преобразуем к удобному для расчета виду

$$\vec{V}_{\text{средн}} = \frac{\sqrt{E_{\text{квази}}^2 - \Delta^2}}{E_{\text{квази}}} \cdot \frac{\vec{P}}{m}, \quad (6.10)$$

где  $E_{\text{квази}} \geq \Delta$ .

Поскольку  $E_{\text{квази}} \equiv \sqrt{(E - F)^2 + \Delta^2}$  и, следовательно, не зависит от направления импульса,

$$\begin{aligned} G_E(E_{\text{квази}}) &= \frac{S_{E_{\text{квази}}}}{4\pi^3 \cdot \hbar^3 \cdot V_{\text{средн}}(E_{\text{квази}})} = \frac{4\pi P^2}{4\pi^3 \cdot \hbar^3 \cdot V_{\text{средн}}(E_{\text{квази}})} = \\ &= \frac{P \cdot m \cdot E_{\text{квази}}}{\pi^2 \hbar^3 \cdot \sqrt{E_{\text{квази}}^2 - \Delta^2}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Заметим, что в достаточно широком интервале значений  $E_{\text{квази}}$  (от  $\Delta$  до  $\hbar \cdot \omega_D$ ) значение  $P$  меняется очень слабо (от  $P_F - \sqrt{\frac{m \cdot \hbar^2 \cdot \omega_D^2}{2F}}$  до  $P_F + \sqrt{\frac{m \cdot \hbar^2 \cdot \omega_D^2}{2F}}$ )<sup>1)</sup>. В таком случае можно вместо громоздкого точного выражения удовлетвориться приближенным —

$$G_E(E_{\text{квази}}) = \frac{P_F \cdot m}{\pi^2 \cdot \hbar^3} \cdot \frac{E_{\text{квази}}}{\sqrt{E_{\text{квази}}^2 - \Delta^2}},$$

в котором  $\left(\frac{P_F \cdot m}{\pi^2 \cdot \hbar^3}\right) \equiv G_E(E)$  — хорошо знакомая нам плотность состояний на уровне Ферми. Поэтому

$$G_E(E_{\text{квази}}) = G_E(F) \cdot \frac{E_{\text{квази}}}{\sqrt{E_{\text{квази}}^2 - \Delta^2}}. \quad (6.12, \text{a})$$

Учитывая температурную зависимость  $\Delta(T)$ , целесообразно придать формуле (6.12,а) вид

$$G_E(E_{\text{квази}}, T) = G_E(F) \cdot \frac{E_{\text{квази}}}{\sqrt{E_{\text{квази}}^2 - \Delta^2(T)}}. \quad (6.12, \text{б})$$

На рис. 6.4 представлены зависимости (6.12,б). На том же рисунке представлены зависимости степеней заполнения состояний квази-частицами. Как для квазиэлектрона, так и для квазидырки, согласно (5.62), имеем:

$$\tilde{n}(E_{\text{квази}}, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_{\text{квази}}}{k_B \cdot T}\right)}. \quad (6.13)$$

При необходимости можно вычислить общую концентрацию тех и других квазичастиц по формуле

$$n_{\text{квази}}(T) = 2 \int_{\Delta}^{\infty} G_E(E_{\text{квази}}, T) \cdot \tilde{n}(E_{\text{квази}}, T) dE_{\text{квази}}. \quad (6.14)$$

1) Напомним, что  $\frac{\hbar \cdot \omega_D}{\Delta} \gg 1$ ,  $\frac{\hbar \cdot \omega_D}{F} \ll 1$ .

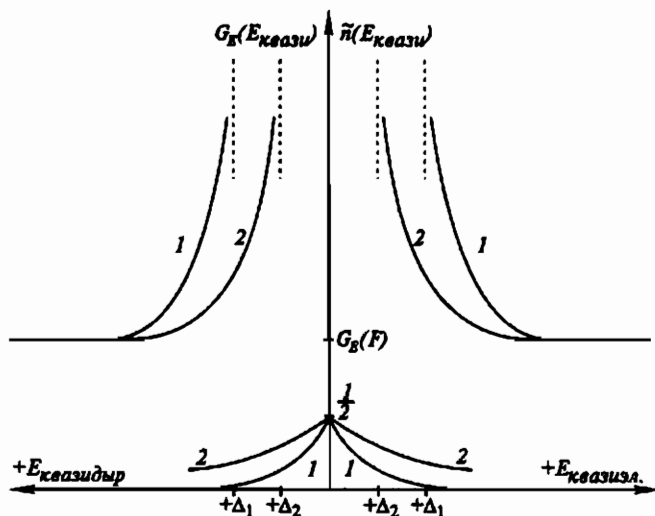


Рис. 6.4. Плотности состояний (верхние кривые) и степени заполнения (нижние кривые) при двух температурах  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ), меньших критической

Таким образом, казалось бы, нет никаких препятствий, чтобы по аналогии с полупроводником построить энергетическую диаграмму и для сверхпроводника.

### §6.3. Неспаренные электроны. Энергетическая диаграмма сверхпроводника

Пусть изображенная на рис. 6.5 диаграмма характеризует сверхпроводящий образец. Попробуем интерпретировать ось энергий и линии  $E_1$ ,  $E_0$ ,  $E_2$ , используя понятия, наиболее близкие к полупроводниковым.

Прежде всего заметим, что в случае полупроводника линия  $E_0$  представляла бы уровень Ферми<sup>1)</sup>. Крайне важно, чтобы и на диаграмме сверхпроводника можно было обнаружить уровень Ферми. Его положение свидетельствовало бы, например, о равновесии (или,

<sup>1)</sup> Имеется в виду, что в идеально чистом полупроводнике уровень Ферми расположен посередине запрещенной зоны.

наоборот, его отсутствию) сверхпроводящего образца с другим образцом, о термодинамическом равновесии между коллективами нормальных квазиэлектронов и нормальных квазидырок.

Чтобы отождествить линию  $E_0$  с уровнем Ферми, введем новые понятия.

1. Учитывая, что верхняя зона — зона квазиэлектронов, положим

$$E_{\text{квази}} + F \equiv E_{\text{с.н.э.}}, \quad (6.15)$$

где  $E_{\text{с.н.э.}}$  — энергия свободных неспаренных электронов. Определение “неспаренный” призвано напомнить, что рассматриваемый электрон заполняет энергетическое состояние, соответствующее скорости  $\vec{V}$ , совершенно независимо от того, заполнено или нет состояние с той же энергией, но со скоростью  $(-\vec{V})$ . Заметим, что неспаренные электроны считаются не взаимодействующими не только друг с другом, но и с электронами, образующими коллектив сверхпроводящих частиц. Что же касается определения “свободный”, то оно указывает лишь на нахождение квазичастицы именно в верхней зоне: верхняя зона полупроводника была бы зоной свободных электронов. На самом деле, как мы знаем, нормальная квазичастица в сверхпроводнике не является свободной в той же степени, в какой — в полупроводнике.

Таким образом, термин “свободный неспаренный электрон” сверхпроводника попросту заменяет термин “нормальный квазиэлектрон”. Аналогичная замена — для нормальной квазидырки.

С помощью формулы (6.15) можно представить степень заполнения состояния в верхней зоне свободным неспаренным электроном следующим образом:

$$\bar{n}_{\text{с.н.э.}}(E_{\text{с.н.э.}}) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{[E_{\text{квази}} + F] - F}{k_B \cdot T}\right)} = \frac{1}{1 + \exp\frac{E_{\text{с.н.э.}} - F}{k_B \cdot T}}. \quad (6.16)$$

Как видим, это обычная функция Ферми-Дирака.

Далее, используя формулы (6.12), напишем выражение для плотности состояний свободных неспаренных электронов:

$$G_E(E_{\text{с.н.э.}}, T) = G_E(F) \cdot \frac{E_{\text{с.н.э.}}}{\sqrt{(E_{\text{с.н.э.}} - F)^2 - \Delta^2(T)}}. \quad (6.17)$$

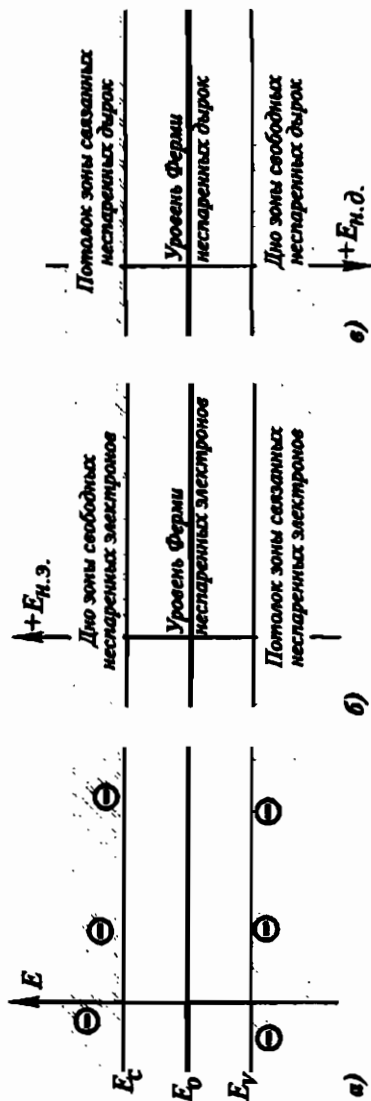


Рис. 6.5. Энергетические диаграммы светодиодов: *а*) — исходная диаграмма; *б*) — интерпретированная с помощью электронной терминологии; *в*) — интерпретированная с помощью дырочной терминологии

Очевидно, мы можем теперь интерпретировать ось энергии на рис. 6.5 как ось энергии неспаренных электронов (рис. 6.6,а). Начиная со значений  $F + \Delta \equiv E_{н.э.}$ , справедливо отождествление

$$E_{н.э.} \equiv E_{с.н.э.} \quad (F + \Delta \leq E_{с.н.э.} < \infty).$$

Таким образом выделяем зону свободных неспаренных электронов, уровень Ферми которых  $F_{с.н.э.}$ , если отсчитать его от дна зоны (уровня  $E_1$  на рис. 6.5), равен  $(-\Delta)$ :

$$F_{с.н.э.} = -\Delta. \quad (6.18)$$

В интервале

$$F - \Delta < E_{н.э.} < F + \Delta$$

находится запрещенная зона шириной  $2\Delta$ . Неспаренный электрон не может находиться на уровнях этой зоны.

Интервалу  $E_{н.э.} \leq F - \Delta$  соответствует нижняя зона, которую мы интерпретируем как зону связанных неспаренных электронов (уровень  $E_2$  на рис. 6.5 играет роль ее потолка).

Далее целесообразно ввести величину

$$\frac{1}{1 + \exp \frac{E_{н.э.} - F}{k_B \cdot T}} \equiv \tilde{n}_{н.э.}(E_{н.э.}) \quad (6.19)$$

степень заполнения одного энергетического состояния просто неспаренным электроном. В верхней зоне (зоне свободных неспаренных электронов), как уже говорилось,  $E_{н.э.} \equiv E_{с.н.э.}$ , и потому величина  $\tilde{n}_{н.э.}$  преобразуется в  $\tilde{n}_{с.н.э.}$ .

По аналогии с полупроводником введем понятие о дырке в зоне неспаренных электронов. Тогда степень заполнения состояния неспаренной дыркой

$$\tilde{n}_{н.д.}(E_{н.э.}) = 1 - \tilde{n}_{н.э.}(E_{н.э.}) = \frac{1}{1 + \exp \frac{F - E_{н.э.}}{k_B \cdot T}}. \quad (6.20)$$

Если, опять-таки по аналогии с полупроводником, считать нижнюю энергетическую зону зоной свободных неспаренных дырок, не-

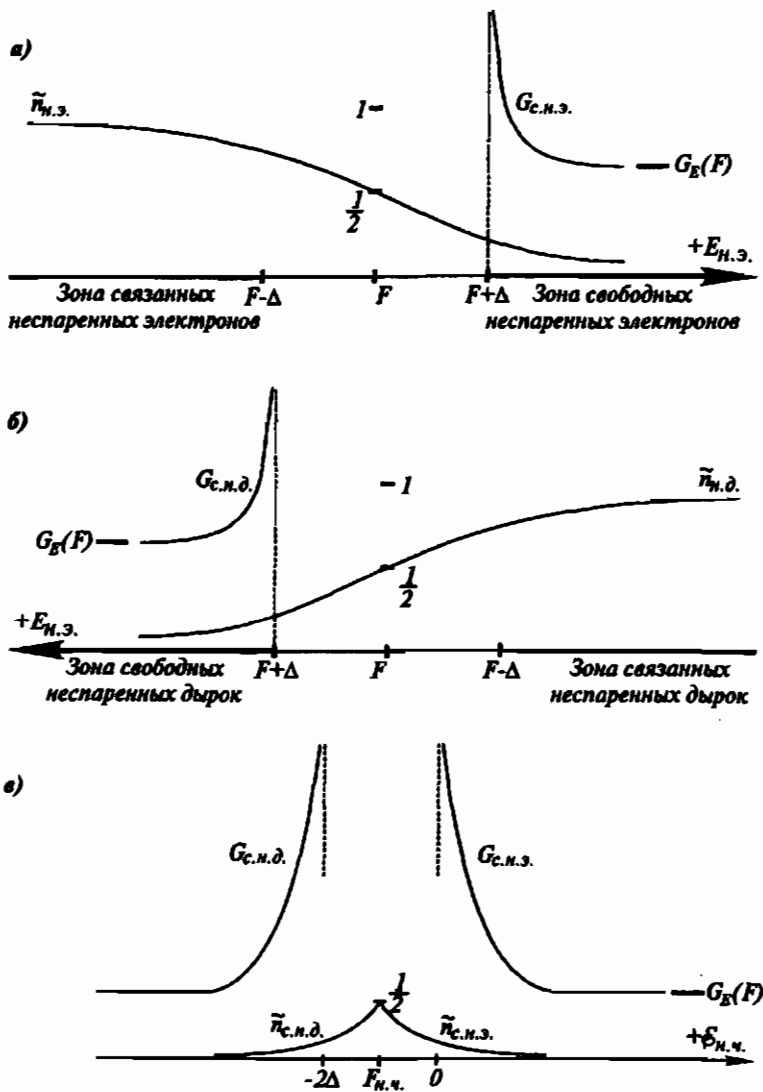


Рис. 6.6. Плотности состояний свободных неспаренных частиц (н.ч.) и степени заполнения состояний:

а) с использованием электронной терминологии; б) с использованием дырочной терминологии; в) по аналогии с собственным полупроводником



обходимо направить ось их энергий противоположно оси энергий неспаренных электронов (рис. 6.6,б). После этого:  $E_{н.д.} \equiv E_{с.н.д.}$  в интервале энергий  $F + \Delta \leq E_{с.н.д.} < \infty$ ;  $\tilde{n}_{н.д.}$  преобразуется в  $\tilde{n}_{с.н.д.}$ ; кроме того

$$G_{с.н.д.}(E_{с.н.д.}, T) = G_E(F) \cdot \frac{E_{с.н.д.} - F}{\sqrt{(E_{с.н.д.} - F)^2 - \Delta^2(T)}}; \quad (6.21)$$

$$F_{с.н.д.} = -\Delta. \quad (6.22)$$

Совпадение величин  $F_{с.н.д.}$  и  $F_{с.н.э.}$  отражает термодинамическое равновесие между свободными неспаренными дырками и электронами. Легко видеть, что при  $T = 0$  нет ни тех, ни других. Рост температуры сопровождается ростом темпа генерации и тех, и других<sup>1)</sup>. А поскольку плотности состояний  $G_{с.н.э.}$  и  $G_{с.н.д.}$  в точности совпадают, единый уровень Ферми, равный при  $T = 0$  величине  $(-\Delta)$ , остается неизменным.

Вполне допустима дальнейшая рационализация энергетической диаграммы сверхпроводника. Напомним, что в случае полупроводника можно приписать, например, дну зоны свободных электронов (зоны проводимости) нулевое значение энергии, после чего

$$\tilde{n}_{св.эл.} = \left(1 + \exp \frac{E - F}{k_B \cdot T}\right)^{-1}; \quad G_{св.эл.} = \frac{2^{1/2} \cdot m_{эл.}^{3/2} \cdot E^{1/2}}{\pi^2 \cdot \hbar^3}; \quad E > 0.$$

Тогда потолку валентной зоны отвечает величина  $-E_g$ , и

$$\tilde{n}_{св.д.} = \left(1 + \exp \frac{F - E}{k_B \cdot T}\right)^{-1}; \quad G_{св.д.} = \frac{2^{1/2} \cdot m_d^{3/2} \cdot (-E_g - E)^{1/2}}{\pi^2 \cdot \hbar^3}; \quad E < -E_g.$$

Если  $m_{эл.} = m_d$ , то

$$F = -\frac{E_g}{2}.$$

1) И, разумеется, темпа рекомбинации.

Чтобы провести аналогичные преобразования для сверхпроводника, положим

$$E_{н.ч.} - (F + \Delta) \equiv \epsilon_{н.ч.},$$

где  $\epsilon_{н.ч.}$  — энергия неспаренной частицы. При этом дно верхней зоны отвечает значению  $\epsilon_{н.ч.} = 0$ , и для свободных неспаренных частиц:

$$\tilde{n}_{с.н.э.} = \left( 1 + \exp \frac{\epsilon_{н.ч.} - F_{н.ч.}}{k_B \cdot T} \right)^{-1}; \quad G_{с.н.э.} = G_E(F) \cdot \frac{\epsilon_{н.ч.} + \Delta}{\sqrt{(\epsilon_{н.ч.} + \Delta)^2 - \Delta^2}};$$

$$\epsilon_{н.ч.} \geq 0,$$

где  $F_{н.ч.}$  — уровень Ферми коллектива неспаренных частиц.

Потолку нижней зоны отвечает значение  $\epsilon_{н.ч.} = -2\Delta$  и

$$\tilde{n}_{с.н.д.} = \left( 1 + \exp \frac{F_{н.ч.} - \epsilon_{н.ч.}}{k_B \cdot T} \right)^{-1}; \quad G_{с.н.д.} = G_E(F) \cdot \frac{-\Delta - \epsilon_{н.ч.}}{\sqrt{(-\Delta - \epsilon_{н.ч.})^2 - \Delta^2}};$$

$$\epsilon_{н.ч.} \leq -2\Delta.$$

Из рис. 6.6, в, на котором отображены результаты проделанной рационализации, очевидно, что

$$F_{н.ч.} = -\Delta.$$

В итоге от диаграммы на рис. 6.5 переходим к диаграмме, показанной на рис. 6.7. При  $T = 0$  все состояния в верхней зоне свободны (от электронов), а в нижней зоне заняты (связанными электронами). Если в этой ситуации ввести в сверхпроводник один электрон, то только в верхнюю зону; если вывести, то только из нижней зоны.

В обоих случаях в образце появится одна свободная квазичастица, и в обоих случаях (в отличие от полупроводника) она будет иметь отрицательный электрический заряд  $(-1,6) \cdot 10^{-19}$  Кл.

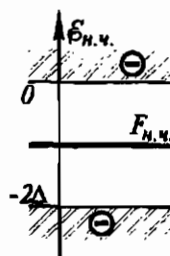


Рис. 6.7. Энергетическая диаграмма сверхпроводника, построенная в соответствии с рис. 6.6, в

### §6.4. Тунелирование неспаренных электронов

Развитые в предыдущих параграфах представления позволяют очень просто объяснить одно из интереснейших явлений — тунелирование неспаренных электронов. Оно происходит на контакте сверхпроводника как со сверхпроводником, так и с нормальным металлом (или полупроводником) при условии, что контактирующие образцы, во-первых, разделены достаточно тонким слоем изолятора; во-вторых, являются элементами электрической цепи, содержащей источник ЭДС.

#### 6.4.1. Контакт “нормальный металл — изолятор — нормальный металл” (НИН-контакт)

На рис. 6.8, *a* представлена энергетическая диаграмма НИН-контакта (двух одинаковых металлов) в ситуации, в которой электрическая цепь разомкнута и напряжение  $U$  на изолирующем промежутке равно нулю. Для простоты допустим, что  $T = 0$  и что сопротивления всех элементов электрической цепи исчезающе малы.

Если замкнуть цепь, на изоляторе появится напряжение  $U$ , причем, согласно схеме на рис. 6.8, *a*, левый металл зарядится отрицательно, а правый — положительно. Из-за этого произойдет разрыв в уровнях Ферми обоих металлов, и, как хорошо видно из рис. 6.8, *б*, в интервале энергий свободного электрона

$$F_1 - |q \cdot U| \leq E \leq F_1$$

степень заполнения всех состояний слева от изолятора окажется равной единице, а справа — нулю. Естественно, возникает туннельный поток электронов слева направо.

Аналогично возникает противоположно направленный туннельный поток, если изменить полярность источника ЭДС.

Рассчитаем в качестве примера плотность туннельного тока ( $J_T$ ) электронов, протекающих слева направо в направлении, перпенди-

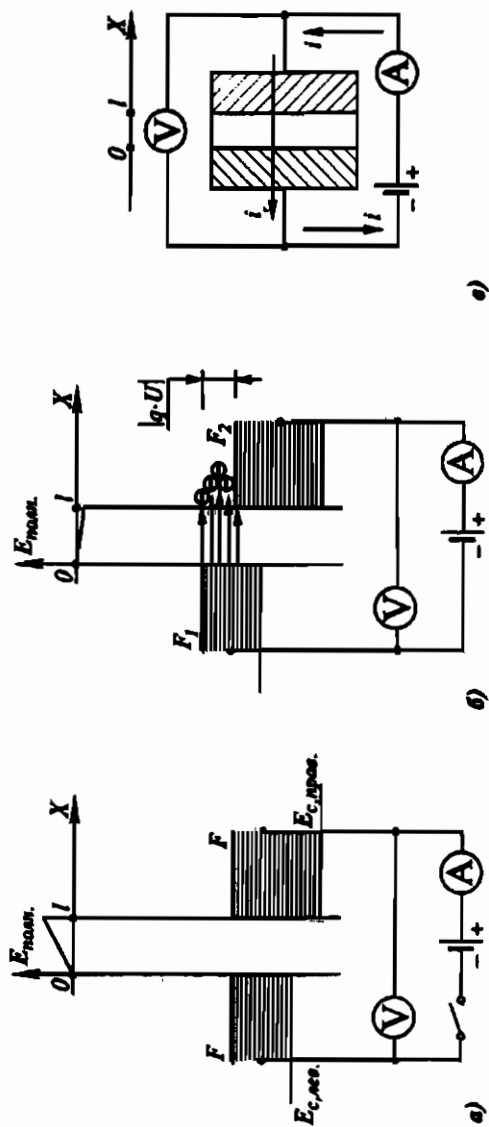


Рис. 6.8. Энергетические диаграммы *ННН*-контакта и схемы цепи:

- а) разрыв цепи. Напряжение на контакте  $U = 0$ .  $F$  — соответствующий этой ситуации уровень Ферми в каждом металле;
- б) цепь замкнута. Напряжение  $U < 0$  ("минус" на левом металле). Уровни Ферми слева и справа от изолирующей прослойки не совпадают;
- в) схема цепи, по которой протекает ток. На участке цепи  $0 \leq U \leq I$  этот ток носит туннельный характер

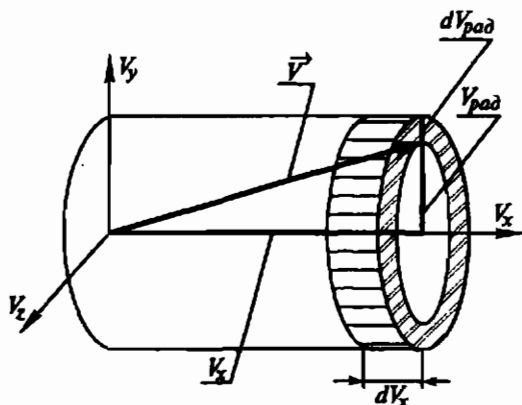


Рис. 6.9. Цилиндрическая система координат в  $\vec{V}$ -пространстве.

Элементарный объем равен  $2\pi \cdot V_{\text{рад}} \cdot dV_{\text{рад}} \cdot dV_x$

куляром плоскости изолирующей прослойки (рис. 6.8, б):

$$J_{\tau,1} = q \int_{V_x=0}^{\infty} \int_{V_z=-\infty}^{\infty} \int_{V_y=-\infty}^{\infty} V_x \cdot \Pi \cdot G_{\vec{V}}(\vec{V}) \times \\ \times \bar{n}(V_x, V_y, V_z, T) \cdot dV_x \cdot dV_y \cdot dV_z, \quad (6.23)$$

где  $\Pi$  — так называемая квантовая прозрачность барьера — отношение плотности потока частиц, протунелировавших сквозь барьер, к плотности потока частиц, налетающих на барьер. Пока что, простоты ради, примем  $\Pi$  не зависящей от энергии.

Перепишем уравнение (6.23), перейдя в  $\vec{V}$ -пространстве к цилиндрической системе координат (рис. 6.9). Тогда

$$J_{\tau,1} = q \Pi \int_0^{\infty} V_x \cdot dV_x \int_0^{\infty} \frac{m^3}{4 \pi^2 \cdot \hbar^3} \cdot \frac{2\pi V_{\text{рад}} \cdot dV_{\text{рад}}}{1 + \exp\left(\frac{\frac{m \cdot V_x^2}{2} + \frac{m \cdot V_{\text{рад}}^2}{2} - F}{k_B \cdot T}\right)}, \quad (6.24)$$

где  $V_{\text{рад}}$  — составляющая (радиальная) скорости в плоскости ( $V_y, V_z$ );

$$V_{\text{рад}}^2 = V_y^2 + V_z^2.$$

Преобразовав уравнение (6.24) и выполнив интегрирование по  $V_{\text{рад}}$ , получим:

$$\begin{aligned}
 J_{\tau,1} &= \frac{q \cdot m^2 \cdot k_B \cdot T \cdot \Pi}{2 \pi^2 \cdot \hbar^3} \times \\
 &\times \int_0^\infty V_x \cdot dV_x \int_0^\infty \frac{d\left(\frac{m \cdot V_{\text{рад}}^2}{2 k_B \cdot T}\right)}{1 + \exp\left(\frac{m \cdot V_x^2}{2 k_B \cdot T} - F\right) \cdot \exp\left(\frac{m \cdot V_{\text{рад}}^2}{2 k_B \cdot T}\right)} = \\
 &= \frac{q \cdot m^2 \cdot k_B \cdot T \cdot \Pi}{2 \pi^2 \cdot \hbar^3} \int_0^\infty dV_x \cdot V_x \cdot \ln\left(1 + e^{-\frac{m \cdot V_x^2}{2 k_B \cdot T} - F}\right). \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

Примем для определенности столь низкую температуру металла, чтобы оказались справедливыми неравенства:

$$\exp\left(-\frac{m \cdot V_x^2}{2 k_B \cdot T} - F\right) \ll 1 \quad \text{при} \quad \frac{m \cdot V_x^2}{2} \geq F + \delta_E; \quad (6.26, a)$$

$$\exp\left(-\frac{m \cdot V_x^2}{2 k_B \cdot T} - F\right) \gg 1 \quad \text{при} \quad \frac{m \cdot V_x^2}{2} \leq F - \delta_E, \quad (6.26, b)$$

где  $\delta_E$  — очень малый по сравнению с  $F$  энергетический интервал<sup>1)</sup>. Тогда

$$\ln\left(1 + e^{-\frac{m \cdot V_x^2}{2 k_B \cdot T} - F}\right) = \begin{cases} \ln e^{-\frac{m \cdot V_x^2}{2 k_B \cdot T} - F} = -\frac{m \cdot V_x^2}{2 k_B \cdot T} - F & \text{при} \quad \frac{m \cdot V_x^2}{2} \leq F - \delta_E, \quad (6.27, a) \\ e^{-\frac{m \cdot V_x^2}{2 k_B \cdot T} - F} \ll 1 & \text{при} \quad \frac{m \cdot V_x^2}{2} \geq F + \delta_E. \quad (6.27, b) \end{cases}$$

1) Параметр  $\delta_E = k_B \cdot T$ .

На рис. 6.10 представлена схематично зависимость

$$f(V_x) \equiv V_x \cdot \ln \left[ 1 + \exp \left( - \frac{\frac{m \cdot V_x^2}{2} - F}{k_B \cdot T} \right) \right].$$

Совершенно очевидно, что с достаточной точностью можно положить:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} V_x \cdot \ln \left( 1 + e^{-\frac{\frac{m \cdot V_x^2}{2} - F}{k_B \cdot T}} \right) \cdot dV_x &\approx \int_0^{\sqrt{\frac{2F}{m}}} V_x \cdot \frac{F - \frac{m \cdot V_x^2}{2}}{k_B \cdot T} \cdot dV_x = \\ &= \frac{1}{m \cdot k_B \cdot T} \int_0^F (F - E) \cdot dE = \frac{F^2}{2m \cdot k_B \cdot T}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Тогда

$$J_{\tau,1} = \frac{q \cdot m \cdot F^2 \cdot \Pi}{4 \pi^2 \cdot \hbar^3} = \frac{q \cdot V_F \cdot G_E(F) \cdot F \cdot \Pi}{8}.$$

Напомним, что здесь  $V_F$ ,  $G_E(F)$  — соответственно фермиевская скорость и плотность состояний на уровне Ферми.

Естественно, что в отсутствие напряжения на туннельном контакте двух одинаковых металлов ток точно такой же плотности течет и справа налево, а потому плотность результирующего тока равна нулю.

Если же на контакте существует напряжение  $U$ , между уровнями Ферми слева и справа от контакта возникает разрыв на величину  $|qU|$ . При условии, что этот разрыв невелик (не приведет к нарушению неравенства (6.26)), можно сохранить для расчета преобразование (6.28) и тогда:

$$\begin{aligned} J_{\tau, \text{результ.}} &= \frac{q \cdot m \cdot \Pi}{2 \pi^2 \cdot \hbar^3} \left\{ \int_0^{F + \frac{|q \cdot U|}{2}} \left[ \left( F + \frac{|q \cdot U|}{2} \right) - E \right] \cdot dE - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{F - \frac{|q \cdot U|}{2}} \left[ \left( F - \frac{|q \cdot U|}{2} \right) - E \right] \cdot dE \right\} = \end{aligned}$$

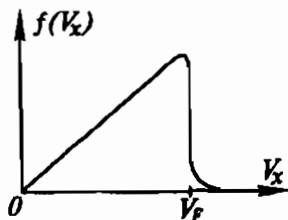


Рис. 6.10. Качественный вид зависимости  $f(V_x)$ ;  $V_F = \sqrt{\frac{2F}{m}}$

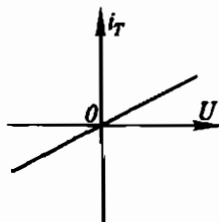


Рис. 6.11. Вольт-амперная характеристика НИИ-контакта

$$\begin{aligned}
 &= \frac{q \cdot m \cdot \Pi}{2 \pi^2 \cdot \hbar^3} \left\{ \int_{F - \frac{|q \cdot U|}{2}}^{F + \frac{|q \cdot U|}{2}} \left( F + \frac{|q \cdot U|}{2} - E \right) \cdot dE + \int_0^{F - \frac{|q \cdot U|}{2}} |q \cdot U| \cdot dE \right\} = \\
 &= -\frac{q^2 \cdot m \cdot F \cdot \Pi}{2 \pi^2 \cdot \hbar^3} \cdot |U| = -\frac{q^2 \cdot V_F \cdot G_E(F) \cdot \Pi}{4} \cdot |U|. \quad (6.29)
 \end{aligned}$$

Здесь принято, что уровень Ферми в левом металле поднялся на  $\frac{|q \cdot U|}{2}$  (“минус” батареи на этом металле), а в правом на столько же опустился (“плюс” на этом металле). Знак минус в правой части (6.29) перед дробью поставлен с учетом того, что  $q < 0$ : результирующий ток течет противоположно положительному направлению оси  $x$ .

Обозначив символами  $S_{\text{И}}$  и  $i_{\text{T}}$  площадь изолятора и величину результирующего туннельного тока, получим с помощью соотношения (6.29) уравнение, выражающее вольт-амперную характеристику туннельного контакта (рис. 6.11):

$$i_{\text{T}} = \frac{U}{R_{\text{T}}},$$

где  $R_{\text{T}} = \frac{4}{q^2 \cdot V_F \cdot G_E(F) \cdot \Pi \cdot S_{\text{И}}}$  — сопротивление туннельного контакта при исчезающе малой температуре.



#### 6.4.2. Туннельный контакт “нормальный металл — изолятор — сверхпроводник” (НИС-контакт)

На рис. 6.12 представлены энергетические диаграммы НИС-контакта при  $T = 0$ , отвечающие трем случаям:  $U = 0$ ;  $U < 0$  (“минус” на левом — нормальном — металле);  $U > 0$  (“плюс” на левом — нормальном — металле). Поскольку свободные электроны нормального металла можно считать неспаренными с таким же основанием, с каким считать неспаренными нормальные электроны сверхпроводника, на диаграммах фигурирует общая для обоих металлов ось энергий неспаренных электронов. Чтобы не загромождать формулы, индекс “н.э.” у символа энергии снят. Приведены повсюду лишь небольшие фрагменты диаграмм — небольшой интервал энергий около уровня Ферми.

Сравнивая все три случая ( $U \geq 0$ ), легко убедиться, что при  $T = 0$  туннельные переходы неспаренных электронов возможны лишь, если

$$|U| > \Delta.$$

Приступим к расчету результирующего туннельного тока. Прежде всего обсудим, допустимо ли продолжать считать параметр  $\Pi$  независимым от энергии. Дело в том, что, по определению,  $\Pi$  пропорциональна плотности разрешенных энергетических состояний на той стороне барьера, куда должны туннелировать электроны.

Рассчитывая плотность туннельного тока из сверхпроводника в нормальный металл, следует учитывать, что плотность состояний неспаренных электронов сверхпроводника практически не зависит от энергии, как только последняя начинает отличаться от значения  $F \pm \Delta$  на очень небольшую, по сравнению с  $F$ , величину. Но тогда можно считать, что плотность состояний в нормальном металле вообще не зависит от энергии:  $G_E(E) = G_E(F)$ , и потому для электронов, туннелирующих в нормальный металл,

$$\Pi_{c \rightarrow n} = \alpha \cdot G_E(F), \quad (6.30)$$

где  $\alpha$  — некоторая константа.

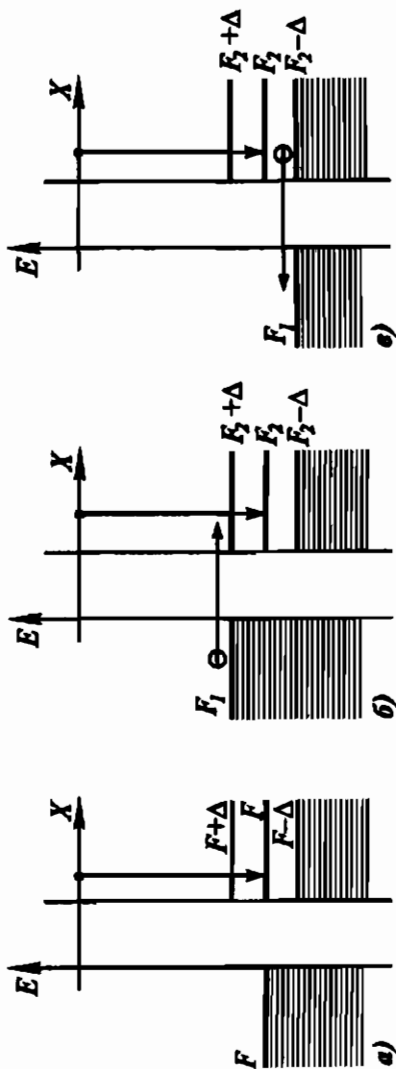


Рис. 6.12. Энергетические диаграммы НИС-контакта при  $T = 0$  (уровни, занятые электронами, заштрихованы):  
 а)  $U = 0$ , переходы электронов слева (с уровней, расположенных в интервале  $F - \Delta \leq E \leq F$ ) направо запрещены, поскольку ведут в запрещенную зону сверхпроводника (формально для таких переходов  $\Gamma_c \rightarrow n = 0$ );  
 б)  $U < 0$  (минус на левом-нормальном-металле),  $F_1 - F_2 = |q \cdot U| > \Delta$ ;  
 в)  $U > 0$  (плюс на левом-нормальном-металле),  $F_2 - F_1 = |q \cdot U| > \Delta$

Приступим к расчету. Сначала покажем, что плотность состояний неспаренных электронов сверхпроводника в  $\vec{V}$ -пространстве зависит от модуля скорости. Начнем с привычного соотношения

$$\begin{aligned} G_{\vec{V}}(\vec{V}) \cdot 4\pi V^2 \cdot dV &= G_E(F) \frac{F-E}{\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}} \cdot dE = \\ &= G_E(F) \cdot d(-\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Учитывая, что для нижней, полностью заполненной при  $T=0$  зоны

$$\frac{m \cdot V^2}{2} = F - \sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}, \quad (6.32)$$

получаем

$$\begin{aligned} V^2 \cdot dV &= \frac{2}{m} \cdot \left( \frac{F - \sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}}{2m} \right)^{1/2} \cdot \frac{(F-E) \cdot dE}{\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}} = \\ &= \frac{V}{m} \cdot d(-\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Затем, подставляя (6.33) в (6.31), приходим к формуле

$$G_{\vec{V}}(\vec{V}) = G_E(F) \cdot \frac{m}{4\pi \cdot V}. \quad (6.34)$$

Подчеркнем, однако, что конкретное соотношение (6.34) основано также и на предположении о независимости величины  $G_E$  от  $E$ , даже когда  $E$  значительно отличается от  $F$ .

Зависимость  $G_{\vec{V}}(\vec{V})$  от модуля  $V$  вынуждает несколько изменить ход расчета, использованный при выводе величины  $J_{\tau,1}$  в предыдущем параграфе. Мы опять-таки перейдем в цилиндрическую систему координат, но будем искать число состояний в сферическом слое радиуса  $V$  и толщины  $dV$  (рис. 6.13). В этом случае плотность тока электронов, туннелирующих из сверхпроводника, равна:

$$\begin{aligned} J_{\tau,1} &= q \cdot \int_{V=V_1}^{V_2} \int_{V_x=0}^V 2\pi V \cdot dV \cdot dV_x \cdot G_{\vec{V}}(\vec{V}) \cdot \Pi_{c \rightarrow n} \cdot V_x = \\ &= q \cdot \int_{V_1}^{V_2} 2\pi V \cdot dV \cdot G_{\vec{V}}(\vec{V}) \cdot \Pi_{c \rightarrow n} \cdot \int_0^V V_x \cdot dV_x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= q \cdot \alpha \cdot G_E(F) \cdot \pi \int_{V_1}^{V_2} V^3 \cdot dV \cdot \frac{G_E(F) \cdot m}{4\pi \cdot V} = \\
 &= \frac{q \cdot \alpha \cdot m \cdot G_E^2(F)}{4} \cdot \int_{V_1}^{V_2} V^2 \cdot dV. \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

Использование зависимости (6.34) предполагает, как было сказано, интегрирование в сравнительно узком интервале абсолютных значений скорости. К счастью, из рис. 6.12 следует, что только в таком интервале и происходят туннельные переходы, вносящие вклад в результирующий ток.

Подставляя (6.32) в (6.35), преобразуем последнее к виду

$$\begin{aligned}
 J_{T,1} &= \frac{q \cdot \alpha \cdot G_E^2(F)}{4} \cdot 2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{m \cdot V^2}{2} \cdot dV = \\
 &= \frac{q \cdot \alpha \cdot G_E^2(F)}{4} \cdot \int_{E_1}^{E_2} \left( \frac{2 [F - \sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}]}{m} \right)^{1/2} \cdot d(-\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}). \quad (6.36)
 \end{aligned}$$

В качестве верхнего предела можно выбрать (при отсутствии напряжения на контакте) лишь значение  $E_2 = F - \Delta$ .

Что касается нижнего предела, то величину  $E_1$  нужно выбрать (в соответствии с ранее сказанным) немногим меньшей, чем  $E_2$ . Положим

$$E_1 = F - \epsilon, \text{ где } \Delta \ll \epsilon \ll F.$$

Тогда

$$F - \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2} \leq [F - \sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}] \leq F,$$

и можно с достаточной точностью положить:

$$\begin{aligned}
 &\int_{E_1}^{E_2} \left( \frac{2 [F - \sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}]}{m} \right)^{1/2} \cdot d(-\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}) = \\
 &= \left( \frac{2F}{m} \right)^{1/2} \int_{F-\epsilon}^{F-\Delta} d(-\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}) = V_F \cdot \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2}.
 \end{aligned}$$

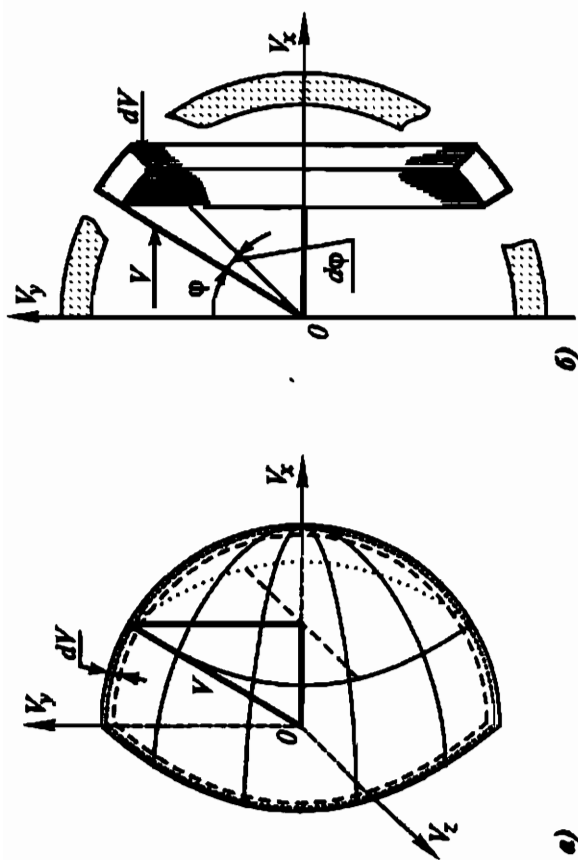


Рис. 6.13. Сферический слой в  $\vec{V}$ -пространстве в цилиндрической системе координат:  
 а — полусферический слой радиуса  $V$  и толщины  $dV$ ;  
 б — сечение этого слоя плоскостью перпендикулярной оси  $V_z$ . Объем фигуры, напоминающей по форме торонд, равен  $(V \cdot d\varphi) dV \cdot (2\pi V \cdot \cos \varphi) = 2\pi V^2 \cdot \cos \varphi \cdot dV$ . Учтывая, что  $V_z = V \cdot \sin \varphi$  и, следовательно,  $dV_z = V \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$ , объем можно вычислить также по формуле  $2\pi \cdot V \cdot dV \cdot dV_z$ .

Таким образом

$$J_{\tau,1} = \alpha \frac{q \cdot G_E^2(F) \cdot V_F}{4} \cdot \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2} \quad (6.37)$$

Вычислим теперь плотность тока электронов, туннелирующих из нормального металла в сверхпроводник, используя все те предположения, о которых ранее шла речь (в частности, считая, что плотность энергетических состояний в нормальном металле не зависит от энергии и равна  $G_E(F)$ ).

Получаем

$$J_{\tau,2} = \frac{q \cdot G_E(F) \cdot V_F}{4} \cdot \int_{F-\epsilon}^{F-\Delta} dE \cdot \Pi_{n \rightarrow c} \quad (6.38)$$

В соответствии с формулой (6.30) примем для  $\Pi_{n \rightarrow c}$  соотношение

$$\Pi_{n \rightarrow c} = \alpha \cdot G_E(F) \cdot \frac{(F-E)}{\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}} \quad (6.39)$$

где величина  $G_E(F) \cdot \frac{(F-E)}{\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}}$  представляет собой плотность состояний неспаренных электронов в сверхпроводнике.

Подстановка (6.39) в (6.38) приводит к выражению

$$\begin{aligned} J_{\tau,2} &= \alpha \cdot \frac{q \cdot G_E^2(F) \cdot V_F}{4} \cdot \int_{F-\epsilon}^{F-\Delta} d(-\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}) = \\ &= \alpha \cdot \frac{q \cdot G_E^2(F) \cdot V_F}{4} \cdot \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2} \quad (6.40) \end{aligned}$$

Сравнивая формулы (6.40) и (6.37), видим, что, как и должно быть при  $U=0$ ,  $J_{\text{результ.}} = J_{\tau,1} - J_{\tau,2} = 0$ .

Пусть теперь  $U > 0$  ("плюс" на левом-нормальном-металле), причем пусть уровень Ферми нормального металла снизится на  $|q \cdot U|$ , а уровень Ферми сверхпроводника не изменится. Тогда выражение

(6.40) не изменится, а вместо (6.37) получим:

$$\begin{aligned}
 J_{\tau,1} &= \alpha \cdot \frac{q \cdot G_E^2(F) \cdot V_F}{4} \cdot \left( -\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2} \Big|_{F-\epsilon}^{F-|q \cdot U|} \right) = \\
 &= \alpha \cdot \frac{q \cdot G_E^2(F) \cdot V_F}{4} \cdot \left( \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2} - \sqrt{(q \cdot U)^2 - \Delta^2} \right), \quad |q \cdot U| > \Delta.
 \end{aligned}$$

Плотность результирующего тока (созданного туннелированием электронов из сверхпроводника в нормальный металл — противоположно положительному направлению оси  $x$ ) равна:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{результ.}} &= J_{\tau,1}(|q \cdot U|) - J_{\tau,2} = \\
 &= -\alpha \cdot \frac{q \cdot G_E^2(F) \cdot V_F}{4} \cdot |q \cdot U| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{q \cdot U}\right)^2} = \\
 &= \alpha \cdot \frac{q^2 \cdot G_E^2(F) \cdot V_F}{4} \cdot |U| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{q \cdot U}\right)^2}, \quad |q \cdot U| > \Delta. \quad (6.41)
 \end{aligned}$$

В этой формуле учтено, что  $q < 0$ .

Пусть теперь уровень Ферми в нормальном металле поднимется на  $|q \cdot U|$  (“минус” на левом-нормальном-металле). Тогда туннельные переходы происходят только из нормального металла в сверхпроводник и только в интервале энергий от  $F + \Delta$  до  $F + |q \cdot U|$  ( $|q \cdot U| > \Delta$ ). Электронов с такими энергиями в сверхпроводнике нет, поэтому и нет обратного потока. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 J_{\text{результ.}} &= \alpha \frac{q \cdot G_E(F) \cdot V_F}{4} \cdot \int_{F+\Delta}^{F+|q \cdot U|} dE \cdot G_E(F) \cdot \frac{(F-E)}{\sqrt{(F-E)^2 - \Delta^2}} = \\
 &= \alpha \cdot \frac{q \cdot G_E^2(F) \cdot V_F}{4} \cdot \sqrt{(q \cdot U)^2 - \Delta^2} = \\
 &= -\alpha \cdot \frac{q^2 \cdot G_E^2(F) \cdot V_F}{4} \cdot |U| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{q \cdot U}\right)^2}, \quad |q \cdot U| > \Delta. \quad (6.42)
 \end{aligned}$$

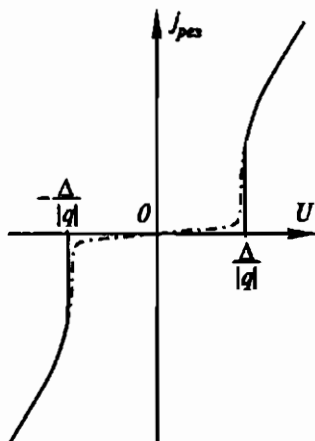


Рис. 6.14. Вольт-амперная зависимость НИС-контакта.

Сплошная линия — при  $T = 0$ ; штрихпунктирная — при  $T_{кр} > T > 0$ . При  $T = 0$  в интервале  $-\frac{\Delta}{|q|} < U < \frac{\Delta}{|q|}$  плотность результирующего тока равна нулю

На рис. 6.14 представлен вид вольт-амперной характеристики туннельного контакта при  $T = 0$ . Положительная ветвь отвечает плюсу, а отрицательная ветвь — минусу на левом металле.

При  $T_{кр} > T > 0$  в верхней зоне сверхпроводника состояния в некоторой степени заполняются электронами, а в нижней зоне освобождаются от них. Кроме того, в нормальном металле происходит перераспределение электронов по состояниям с энергиями, выше и ниже уровня Ферми. Поэтому в интервале  $-\frac{\Delta}{|q|} < U < \frac{\Delta}{|q|}$  плотность результирующего тока отлична от нуля (рис. 6.14).

В заключение приведем (см. рис. 6.15) энергетические диаграммы и вольт-амперные характеристики туннельного контакта двух различных сверхпроводников при  $T_{кр} > T > 0$  (СИС-контакта).



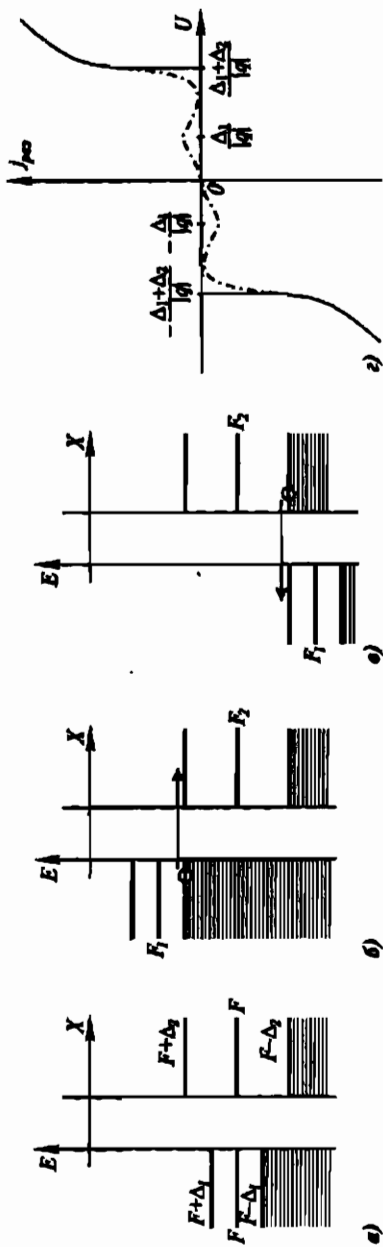


Рис. 6.15. Энергетические диаграммы при  $T = 0$  и вольт-амперные характеристики SIS-контакта (при  $\Delta_2 > \Delta_1$ ):

а)  $U = 0$ ;

б)  $U < 0$  (минус на левом сверхпроводнике);

в)  $U > 0$  (плюс на левом сверхпроводнике);

г) вольт-амперные характеристики. Сплошная линия при  $T = 0$ ; штрих-пунктирная при  $T_{\Phi} > T > 0$ , причем  $T_{\Phi}$  отвечает щели  $\Delta_1$

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1. Расчет диамагнитной восприимчивости Ландау

### 1. Постановка задачи

Будем заранее предполагать, что магнитное поле однородно распределено по сечению образца, так что, как было показано в §1.1, диамагнитную реакцию можно считать очень слабой. Последнее обстоятельство позволяет пренебречь различием между величинами индукции снаружи и внутри образца ( $B_{\text{внешн}} = B_{\text{внутр}} \equiv B$ ).

Для расчета восприимчивости воспользуемся ее термодинамическим определением

$$\chi \equiv - \left. \frac{\mu_0}{B} \cdot \frac{dE(B)}{dB} \right|_{B \rightarrow 0}, \quad (\text{П.1})$$

где  $E(B)$  — значение объемной плотности энергии  $1 \text{ см}^3$  коллектива свободных электронов (нормального металла) в присутствии магнитного поля.

В §1.1 было также показано, что величина  $\chi$  не может зависеть от температуры, если от последней не зависит концентрация ( $n$ ) свободных электронов. Поэтому, считая, что для нормального металла  $n = \text{const}$ , достаточно вычислить энергию  $E(B)$  при  $T = 0$ .

Напомним, что объемная плотность энергии ( $E_0$ ) коллектива свободных электронов при условии  $B = 0$ ,  $T = 0$  определяется по формуле

$$E_0 = \int_0^F \epsilon \cdot G_0(\epsilon) \cdot d\epsilon, \quad (\text{П.2})$$

где  $G_0(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \epsilon^{1/2}$  — плотность энергетических состояний при  $B = 0$ . В результате:

$$E_0 = \frac{1}{5\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot F^{5/2}. \quad (\text{П.3})$$

Таким образом, чтобы вычислить  $E(B)$  необходимо установить вид зависимости величины  $G$  от  $\epsilon$  при  $B \neq 0$ . Для этого, в свою оче-

редь, требуется установить энергетический одночастичный спектр в присутствии магнитного поля.

## 2. Энергетический спектр электрона в однородном магнитном поле

Для установления спектра, необходимо решить уравнение Шредингера

$$\hat{H} \Psi = \varepsilon \cdot \Psi, \quad (\text{П.4})$$

где  $\hat{H}$  — гамильтониан,  $\Psi$  — представитель вектора состояния электрона (в координатном представлении),  $\varepsilon$  — энергия электрона уже в присутствии магнитного поля.

При той конфигурации магнитного поля, которая изображена на рис. 1.1,

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m} \cdot (\hat{P}_x + q \cdot B \cdot y)^2 + \frac{\hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2}{2m}, \quad (1) \quad (\text{П.5})$$

где  $\hat{P}_x \equiv -i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial x}$  и т.п.

Подставляя в (П.4)  $\Psi$  в виде

$$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar} (P_x \cdot x + P_z \cdot z)} \cdot Y(y), \quad (\text{П.6})$$

приходим к уравнению для функции  $Y(y)$ :

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \left[ \varepsilon - \frac{P_z^2}{2m} - \frac{m}{2} \cdot \omega^2 \cdot (y - y_0)^2 \right] \cdot Y = 0. \quad (\text{П.7})$$

Здесь:  $\omega \equiv \frac{|q \cdot B|}{m}$ ;  $y_0 \equiv -\frac{P_x}{q \cdot B}$ ;  $\varepsilon$  и  $Y$  — неизвестные величины.

Уравнение (П.7) характерно для частицы, участвующей в двух движениях: в плоскости  $\{xy\}$  она, двигаясь прямолинейно и равномерно вдоль оси  $x$ , непрерывно падает в точку,  $y$ -координата которой равна  $y_0$ , а  $x$ -координата которой ( $x_0$ ) в любой момент времени может с равной вероятностью находиться в любой точке оси  $x$  (рис. П1).

1) Взаимодействием электронного спинового магнитного момента с магнитным полем пренебрегаем. Магнитная индукция направлена в положительном направлении оси  $z$ .

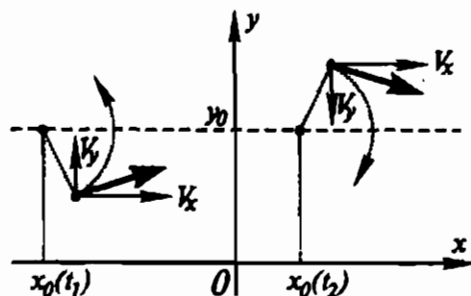


Рис. П1. Движение электрона в плоскости (xy).

Показано положение частицы и центра ее "орбиты" в разные моменты времени ( $t_1$  и  $t_2$ ). Если электронов — множество, то центры всех их "орбит" однородно распределены вдоль любого направления в пространстве.

Кроме того, частица движется прямолинейно и равномерно и вдоль оси  $z$ . Ограничения, которые приходится накладывать на вид функции  $Y$  в (П.7), приводят к допустимым значениям энергии  $\epsilon$ :

$$\epsilon = A \cdot \omega \cdot \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) + \frac{P_z^2}{2m} \quad (\text{П.8})$$

где  $\gamma = 0, 1, 2 \dots$

### 3. Плотность энергетических состояний электрона в присутствии магнитного поля

Пусть размеры образца вдоль осей  $x, y, z$  хотя и огромные, но конечны ( $l_x, l_y, l_z$ ). Потребуем, чтобы центр "орбиты" (величина  $y_0$ ) не выходил за пределы сечения образца) (см. рис. 1.1 и рис. П1). Тогда

$$-\frac{l_y}{2} \leq y_0 \leq \frac{l_y}{2} \quad , \quad 1)$$

и, следовательно, дозволённые значения  $P_x$  должны находиться внутри интервала

$$\Delta P_x = \left| q \cdot B \cdot \frac{l_y}{2} - q \cdot B \cdot \left( -\frac{l_y}{2} \right) \right| = |q \cdot B| \cdot l_y.$$

1) В отличие от рис. 1.1 здесь считаем протяженность образца вдоль  $y$ -оси равной  $l$ , а не  $2l$ .

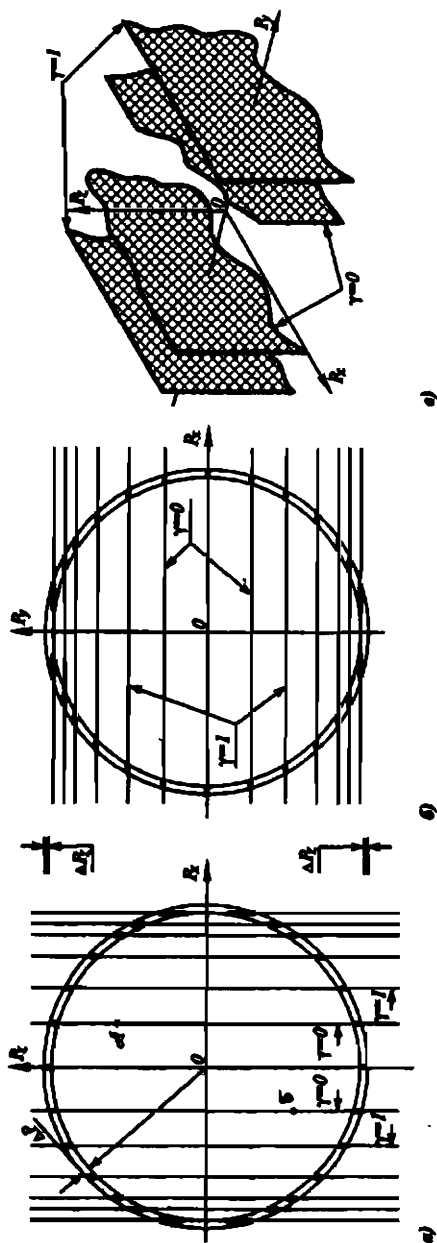


Рис. 12. Трубки Ландау в  $\vec{P}$ -пространстве.

$a$  — сечение трубок плоскостью  $(P_z, P_y)$ ;  $b$  — сечение трубок плоскостью  $(P_z, P_y)$  (ось  $P_z$  направлена на читателя);  $c$  — фрагменты двух первых трубок в аксонометрии.

В пределах трубки с определенным номером  $\gamma$  энергии электрона зависят только от  $P_z$  (точкам  $A$  и  $B$  с одинаковой по модулю  $P_z$ -координатой отвечает одинаковая энергия  $\epsilon$ ).

Отрезки трубок внутри узкого кольца помечены жирными линиями. Всем этим отрезкам отвечает одинаковая энергия.

При расчете величины  $\Delta v_\gamma(\epsilon)$  необходимо учитывать, что изменению радиуса окружности на величину  $\Delta R$  отвечает изменение длины каждой трубки на величину  $2\Delta R$ .

Число ( $\nu_x$ ) разных значений  $P_x$  внутри интервала  $\Delta P_x$  для образца, размер сечения которого вдоль оси  $x$  равен  $l_x$ , составляет

$$\nu_x = \frac{l_x}{2\pi \hbar} \cdot \Delta P_x = \frac{|q \cdot B| \cdot l_x \cdot l_y}{2\pi \hbar}, \quad (\text{П.9})$$

где  $\frac{l_x}{2\pi \hbar}$  — число разных состояний, приходящихся на 1  $\frac{\text{эВс}}{\text{см}}$  (единичный интервал) оси  $P_x$ .

Заметим теперь, что для определенного значения  $\varepsilon$  импульс  $P_z$  (при заданной  $B$ ) равен

$$P_z(\varepsilon) = \sqrt{2m \cdot [\varepsilon - \hbar \cdot \omega(\gamma + \frac{1}{2})]} \equiv P_z(\varepsilon, \gamma), \quad (\text{П.10})$$

то есть является еще и функцией числа  $\gamma$ .

Так как число ( $\Delta \nu_z$ ) разных состояний, приходящихся на 1  $\frac{\text{эВс}}{\text{см}}$  оси  $P_z$ , равно  $l_z/2\pi \hbar$ , число состояний с определенной энергией  $\varepsilon$ , находящихся внутри произвольного интервала  $\Delta P_z(\varepsilon, \gamma)$ , равно

$$\Delta \nu_z(\gamma) = \frac{l_z}{2\pi \hbar} \cdot \Delta P_z(\varepsilon, \gamma), \quad (\text{П.11})$$

С помощью выражений (П.9) и (П.11) можно найти общее число ( $\Delta \nu$ ) разных состояний в области  $\vec{P}$ -пространства, представляющей собой поверхность ограниченной длины вдоль  $P_z$ . Подобные поверхности (см. рис. П.2) называют трубками Ландау. Как видно из рис. П.2, для  $\gamma$ -й трубки

$$\Delta \nu_\gamma(\varepsilon) = \frac{|q \cdot B| \cdot l_x \cdot l_y}{2\pi \hbar} \cdot \left( 2 \cdot \frac{l_z}{2\pi \hbar} \right) \cdot \Delta P_z(\varepsilon, \gamma). \quad (\text{П.12})$$

Отсюда объемная плотность состояний в  $\vec{P}$ -пространстве для "трубки" с номером  $\gamma$  есть

$$\frac{\Delta \nu_\gamma(\varepsilon)}{l_x \cdot l_y \cdot l_z} = 2 \cdot \frac{|q \cdot B|}{(2\pi \hbar)^2} \Delta P_z(\varepsilon, \gamma). \quad (\text{П.13})$$

Подчеркнем, что именно выражение (П.13) для величины  $\Delta \nu_\gamma(\varepsilon)$  не могло быть получено иначе, как в рамках квантовой теории.

Если построить в  $\vec{P}$ -пространстве сферический слой настолько тонкий, чтобы всем входящим в него электронам можно было приписать одинаковую энергию  $\epsilon$ , число состояний внутри этого слоя (при  $B \neq 0$ ) равно

$$G_B(\epsilon) \cdot \Delta\epsilon,$$

и оно же равно

$$\sum_{\gamma=0}^{\gamma(\epsilon)} \frac{\Delta v_{\gamma}(\epsilon)}{l_x \cdot l_y \cdot l_z} = \sum_{\gamma=0}^{\gamma(\epsilon)} 2 \cdot \frac{|q \cdot B|}{(2\pi \hbar)^2} \Delta P_z(\epsilon, \gamma).$$

Отсюда следует, что

$$G_B(\epsilon) = \sum_{\gamma=0}^{\gamma(\epsilon)} 2 \cdot \frac{|q \cdot B|}{(2\pi \hbar)^2} \frac{dP_z(\epsilon, \gamma)}{d\epsilon}. \quad (\text{П.14})$$

Подставляя сюда (П.10) и учитывая множителем 2 традиционное удвоение числа состояний за счет спина, получаем (см. рис. П3):

$$\begin{aligned} G_B(\epsilon) &= \frac{4}{(2\pi \hbar)^2} \cdot |q \cdot B| \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \cdot \sum_{\gamma=0}^{\gamma(\epsilon)} \left[\epsilon - \hbar \cdot \omega \cdot \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \hbar \cdot \omega \cdot \sum_{\gamma=0}^{\gamma(\epsilon)} \left[\epsilon - \hbar \cdot \omega \cdot \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\right]^{-1/2}. \quad (\text{П.15}) \end{aligned}$$

Число  $\gamma_{\text{макс}}$  определим из условия

$$n = \int_0^F G_B(\epsilon) \cdot d\epsilon = \int_0^F G_0(\epsilon) \cdot d\epsilon = \frac{1}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot F^{3/2}, \quad (\text{П.16})$$

отражающего неизменность концентрации свободных электронов как в присутствии, так и в отсутствие магнитного поля.

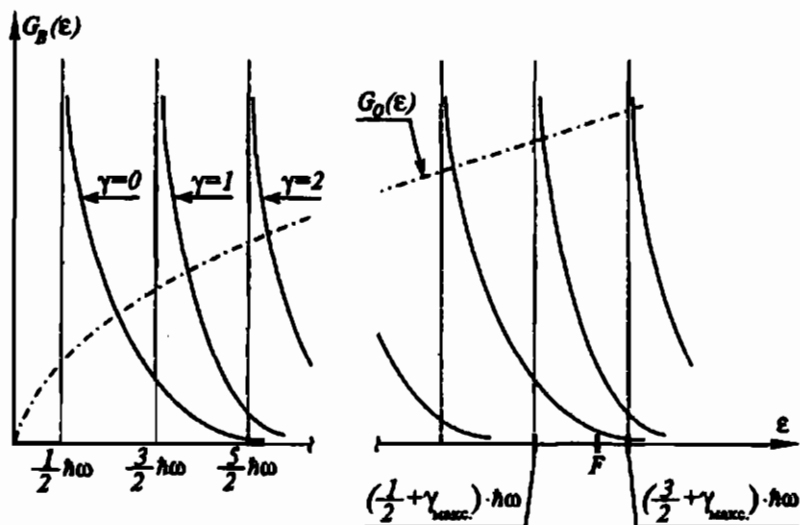


Рис. П3. Плотность энергетических состояний электрона в однородном магнитном поле (для сравнения показана плотность состояний в отсутствие поля)

Подставляя (П.15) в (П.16), получаем уравнение с неизвестным  $\gamma_{\text{макс}}$ :

$$\frac{2 F^{3/2}}{3 \hbar \omega} = \sum_{\gamma=0}^{\gamma_{\text{макс}}} \left[ F - \hbar \cdot \omega \cdot \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2}, \quad (\text{П.17})$$

причем разумно считать, что величина  $F$  в очень слабом магнитном поле останется такой же, как и в отсутствие поля.

Из рис. П3 легко видеть, что  $\gamma_{\text{макс}}$  можно выбрать так, чтобы

$$\hbar \cdot \omega \cdot \left( \gamma_{\text{макс}} + \frac{1}{2} \right) \leq F \leq \hbar \cdot \omega \cdot \left( \gamma_{\text{макс}} + \frac{3}{2} \right),$$

откуда следует соотношение

$$\gamma_{\text{макс}} = \frac{F}{\hbar \cdot \omega} - \alpha, \quad (\text{П.18})$$

в котором

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}. \quad (\text{П.19})$$



#### 4. Вычисление объемной плотности энергии $E(B)$ и восприимчивости $\chi$

При вычислении величины  $E(B)$  следует помнить, что, поскольку число  $\gamma$  и энергия  $\epsilon$  находятся во взаимно однозначном соответствии, значению  $\epsilon$ , равному  $F$ , отвечает число  $\gamma_{\text{макс}}$ .

Величину  $E(B)$  найдем по формуле

$$E(B) = \int_0^F \epsilon \cdot G_B(\epsilon) \cdot d\epsilon = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \hbar \cdot \omega \times$$

$$\times \left\{ F \cdot \sum_{\gamma=0}^{\gamma_{\text{макс}}} [F - \hbar \cdot \omega \cdot (\gamma + \frac{1}{2})]^{1/2} - \frac{2}{3} \sum_{\gamma=0}^{\gamma_{\text{макс}}} [F - \hbar \cdot \omega \cdot (\gamma + \frac{1}{2})]^{3/2} \right\}. \quad (\text{П.20})$$

Преобразуя первую сумму в соответствии с равенством (П.17), приведем  $E(B)$  к виду

$$E(B) = \frac{1}{3\pi^2} \cdot \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot F^{3/2} \cdot \left\{ 1 - \beta \cdot \sum_{\gamma=0}^{\gamma_{\text{макс}}} [1 - \beta \cdot (\gamma + \frac{1}{2})]^{3/2} \right\}, \quad (\text{П.21})$$

где  $\beta \equiv \frac{\hbar \cdot \omega}{F}$ ;  $\gamma_{\text{макс}} = \frac{1}{\beta} - \alpha$ .

Для вычисления суммы в (П.21) воспользуемся формулой суммирования Эйлера.<sup>1)</sup>

Учитывая, что в исчезающе слабом магнитном поле  $\beta \ll 1$ , ограничимся членами, квадратичными по  $\beta$ . Тогда по формуле Эйлера

$$\sum_{\gamma=0}^{\beta^{-1}-\alpha} [1 - \beta \cdot (\gamma + \frac{1}{2})]^{3/2} \approx \int_0^{\frac{1}{\beta}-\alpha} [1 - \beta \cdot (\gamma + \frac{1}{2})]^{3/2} \cdot d\gamma +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ [1 - \beta \cdot (\frac{1}{\beta} - \alpha + \frac{1}{2})]^{3/2} + [1 - \beta \cdot (0 + \frac{1}{2})]^{3/2} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{12} \left\{ \frac{d}{d\gamma} [1 - \beta \cdot (\gamma + \frac{1}{2})]^{3/2} \right\}_{\gamma=\frac{1}{\beta}-\alpha} - \frac{d}{d\gamma} [1 - \beta \cdot (\gamma + \frac{1}{2})]^{3/2} \Big|_{\gamma=0} \Big\}.$$

1) Смирнов В.И., Курс высшей математики, Т. III, ч. 2, М., Физматгиз, 1958, с. 283.

Значение интеграла ( I ) равно

$$I = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \left[ \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^{1/2} - (\alpha \cdot \beta)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)^{1/2} \right]. \quad (\text{П.23})$$

Значение первой фигурной скобки (  $\Phi_1$  ) равно

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^{1/2} + (\alpha \cdot \beta)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)^{1/2} \right]. \quad (\text{П.24})$$

Значение второй фигурной скобки (  $\Phi_2$  ) равно

$$\Phi_2 = \frac{\beta}{8} \left[ \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^{1/2} - \beta^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/2} \right],$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^{\gamma_{\max}} \left[ 1 - \beta \cdot \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \right]^{1/2} &= \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^{1/2} \cdot \left[ \frac{2}{5} \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{40} + \frac{1}{10} \right] - \\ &- \beta^{1/2} \cdot \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^{1/2} \cdot \left[ \frac{2}{5} \alpha^2 - \frac{9}{10} \alpha + \frac{19}{40} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

Обозначив  $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^{1/2} \cdot \left[ \frac{2}{5} \alpha^2 - \frac{9}{10} \alpha + \frac{19}{40} \right] \equiv f(\alpha)$ , разложив  $\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^{1/2}$  в ряд и ограничившись слагаемыми  $\beta^2$ , представим правую часть формулы (П.25) в виде

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\beta}{4} - \frac{\beta^2}{32}\right) \cdot \left[ \frac{2}{5} \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{40} + \frac{1}{10} \right] - \beta^{1/2} \cdot f(\alpha) &= \\ \approx \frac{2}{5} \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{16} + \frac{\beta^2}{320} - \beta^{1/2} \cdot f(\alpha). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\max f(\alpha) \approx \frac{1}{40}$  в интервале  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$ , ограничимся слагаемыми  $\beta$  и придем к окончательному равенству

$$\sum_{\gamma=0}^{\gamma_{\max}} \left[ 1 - \beta \cdot \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \right]^{1/2} \approx \frac{2}{5} \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{16}. \quad (\text{П.26})$$

Подставив (П.26) в (П.21), получим

$$E(B) = \frac{1}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot F^{3/2} \cdot \left\{ 1 - \beta \cdot \left(\frac{2}{5} \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{16}\right) \right\} = E_0 + \\ + \frac{1}{48\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot F^{1/2} \cdot \frac{\hbar^2 \cdot q^2 \cdot B^2}{m^2} = E_0 + \left(\frac{1}{9\pi^4}\right)^{1/3} \cdot \frac{q^2 \cdot n^{1/3}}{m} \cdot \frac{B^2}{8}. \quad (\text{П.27})$$

Подставив (П.27) в (П.1), получаем знаменитую формулу Ландау для диамагнитной восприимчивости:

$$\chi = -\frac{1}{4 \cdot (9\pi^4)^{1/3}} \cdot \frac{q^2 \cdot \mu_0 \cdot n^{1/3}}{m}, \quad (\text{П.28})$$

в которой (как и должно быть, несмотря на всю “квантовость” описания) отсутствует постоянная Планка. По сути дела, вся “квантовость” сводится лишь к строго определенным значениям координат центров ( $y_0$ ) и “радиусов” одночастичных “орбит”.<sup>1)</sup> Число “орбит”, на которых находятся электроны, не может не совпадать с числом электронов.

Предположение же о равномерном распределении центров “орбит” в  $\{x\}$  сечении вообще находится за рамками квантовой теории.

1) Радиусом можно считать величину  $\sqrt{(y-y_0)^2}$ , где  $(y-y_0)^2$  — квантово усредненное значение.

**Приложение 2. Об ограничении, налагаемом соотношением неопределенности**

Предположим, что точечная частица “осциллирует” между бесконечно высокими стенками потенциальной ямы (рис. П.2.1), а центр самой ямы присутствует в любой момент времени с равной вероятностью в любой точке бесконечно протяженной  $X$ -оси. Будем считать, что яма как целое движется (например, вправо) вдоль  $X$ -оси вечно, прямолинейно, и равномерно. В этом случае по определению совпадают скорости ямы — *мгновенно-локальная* ( $V_{м-л, ямы}$ ) и *усредненная по бесконечно большому пространственно-временному континууму* ( $\langle V \rangle$ ):

$$V_{м-л, ямы} = \langle V_{ямы} \rangle = V_{ямы} .$$

Естественно, что средняя по пространству-времени скорость частицы автоматически совпадает с величиной  $V_{ямы}$  :

$$\langle V_{частицы} \rangle = V_{ямы} .$$

Тем не менее  $V_{частицы, м-л} \neq \langle V_{частицы} \rangle$ , а пребывание частицы в яме приводит к неопределенности мгновенно-локальной скорости частицы.

Согласно соотношению Гайзенберга, неопределенность импульса ( $P$ ) частицы, “осциллирующей” внутри упомянутой выше ямы, равна

$$\Delta P_{частицы} = m \cdot \Delta V_{частицы, м-л} = \frac{\hbar}{\Delta x_{ямы}} ,$$

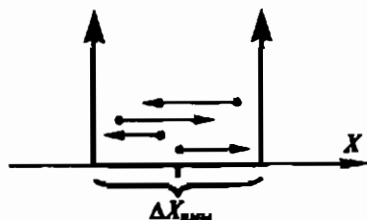
где  $\Delta x_{ямы}$  — протяженность ямы вдоль  $X$ -оси.

Учитывая, что скорости  $\langle V_{частицы} \rangle$  соответствует импульс  $\langle P_{частицы} \rangle$ , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_{частицы, м-л}}{\langle V_{частицы} \rangle} &= \frac{\hbar}{m \cdot \langle V_{частицы} \rangle \cdot \Delta x_{ямы}} = \\ &= \frac{\hbar}{\langle P_{частицы} \rangle \cdot \Delta x_{ямы}} . \end{aligned} \tag{П2.1}$$

Рис. П2.1. Движение частицы в яме, в свою очередь свободно движущейся вдоль  $X$ -оси.

Частица постоянно движется к стенке ямы. (Так как обе стенки эквивалентны, утверждения “частица постоянно движется к стенке” и “частица постоянно движется от стенки” тождественны)



Если  $\frac{\hbar}{\langle P_{\text{частицы}} \rangle \cdot \Delta x_{\text{ямы}}} \ll 1$ , вполне допустимо пренебречь влия-

нием “осцилляций” скорости частицы на характер ее движения. Иначе говоря, частицу *допустимо считать свободной*.

Все, сказанное выше, следует иметь в виду, размышляя над тем, можно или нельзя считать электрон зоны проводимости металла движущимся прямолинейно и равномерно между двумя последовательными актами рассеяния. В случае утвердительного ответа электрону можно приписать вполне определенный импульс, а понятие “длина свободного пробега” приобретает физическую содержательность.

Решить возникшую проблему нетрудно, если сопоставить следующие обстоятельства.

Первое. Свободный пробег электрона в промежутке между двумя последовательными столкновениями с дефектами-рассеивателями можно уподобить рассмотренному выше движению частицы внутри потенциальной ямы. Тогда длину свободного пробега ( $l$ ) следует связать с временем свободного пробега ( $\tau$ ) и средней скоростью ( $V$ ) соотношением

$$l = \langle V \rangle \cdot \tau. \quad (\text{П.2.2})$$

Второе. Все те  $\vec{V}$ -состояния, степень заполнения которых меняется под действием электрического поля и рассеивателей, сосредоточены в узком сферическом поясе, облегающем Ферми-поверхность.

Третье. Даже если бы электроны были совершенно свободными, результирующий вклад в ток все равно вносили бы лишь те из них, скорости которых сосредоточены в упомянутом сферическом поясе.

Учитывая второе и третье обстоятельства, имеет смысл приписать электронам, способным участвовать в электрическом токе, одинаковую по абсолютной величине скорость, равную

$$\langle V \rangle = \frac{1}{m} \cdot \frac{dE}{dV_{\text{мгнов}}} \Big|_{E=F} = V_F = \sqrt{2F/m}. \quad 1) \quad (\text{П2.3})$$

Поскольку на самом деле мгновенная и средняя скорости электрона, сталкивающегося время от времени с дефектами, равны быть не могут, сравним неопределенность значения мгновенной скорости со значением средней скорости. Для этого отождествим величины  $l$  и  $\Delta x_{\text{ямы}}$  и используем соотношения (П2.1) + (П2.3). В результате получим, что

$$\frac{\Delta V_{\text{мгнов}}}{\langle V \rangle} = \frac{\hbar}{2\tau \cdot F}. \quad (\text{П2.4})$$

Даже при достаточно жестких оценках ( $\tau \approx 10^{-13}$  с,  $F = 2$  эВ)

$$\frac{\Delta V_{\text{мгнов}}}{\langle V \rangle} \approx 0,01.$$

Столь малая величина отношения и позволяет считать электрон, пролетающий без столкновений лишь ограниченный участок пространства, все-таки свободным.

Следует учесть, что длина и время свободного пробега сверхпроводящего электрона, как мы видели, бесконечно велики (для бесконечно протяженного образца). Поэтому применительно к любому сверхпроводящему электрону:

$$V_{\text{мгнов}} = \langle V \rangle; \quad \Delta V_{\text{мгнов}} = 0.$$

При  $\langle V \rangle = 0$  каждый из сверхпроводящих электронов покоится (в любой момент времени с равной вероятностью в любой элементарной ячейке образца). При  $\langle V \rangle \neq 0$  каждый из них участвует в электрическом токе, перемещаясь по образцу с одинаковой скоростью, равной  $\langle V \rangle$ .

1) Это выражение представляет собой *динамическое* определение скорости, усредненной по бесконечно большому пространственно-временному континууму.

### Приложение 3. Описание сверхпроводящего состояния металла и проблема высокотемпературной сверхпроводимости

В связи с тем, что механизмы межэлектронного взаимодействия, обуславливающие высокотемпературную и обычную (низкотемпературную) сверхпроводимость, могут оказаться сильно отличающимися друг от друга,<sup>1)</sup> целесообразно заметить, что способ описания сверхпроводящего состояния, предложенный Бардином, Купером и Шриффером принципиально не зависит от механизма взаимодействия.<sup>2)</sup> В частности, в одинаковой степени пригоден для любого механизма межэлектронного взаимодействия тот способ расчета энергии основного и возбужденного состояний сверхпроводника, который использовали БКШ в своей пионерской работе. Приведем важнейшие формулы из этой работы

1. Энергия основного состояния сверхпроводника:

$$E_{(0)} = \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} 2E_i \cdot \bar{N}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ V_i \geq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ V_j \geq 0}}^{\infty} U_{ij} \cdot \sqrt{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_j \cdot (1 - \bar{N}_i) \cdot (1 - \bar{N}_j)}, \quad (\text{П.3.1})$$

где  $E_i = (m V_i^2 / 2)$ , а  $E_i$  и  $\vec{V}_i$  — кинетическая энергия и скорость, отвечающие состоянию свободного электрона;  $\bar{N}_i \equiv \bar{N}(\vec{V}_i)$  — степень заполнения  $\vec{V}_i$ -состояния электроном при условии, что  $\bar{N}(\vec{V}_i) = \bar{N}(-\vec{V}_i)$ ;  $U_{ij}$  — обусловленный межэлектронным взаимодействием матричный элемент перехода двух электронов из  $j$ -го спаренного состояния в  $i$ -е. Суммирование в формуле (П.3.1) ведется по  $V$ -полупространству ( $V_i \geq 0$ ).

2. Энергия сверхпроводника в состоянии с одним одночастичным возбуждением (предполагается, что в  $i$ -спаренном состоянии одно из одночастичных состояний занято электроном, а другое свободно):

$$E_{(1)} = E_{(0)} + \frac{(E_i - F)^2 + \Delta \cdot \sqrt{\Delta^2}}{\sqrt{\Delta^2 + (E_i - F)^2}}, \quad (\text{П.3.2})$$

где  $F$  — уровень Ферми коллектива взаимодействующих электронов (предполагается обычно, что величина  $F$  та же, что и для коллектива

<sup>1)</sup> Механизм, притом нефоннный, обуславливающий высокотемпературную сверхпроводимость, теоретики упорно ищут, начиная с конца 60-х начала 70-х годов XX века.

<sup>2)</sup> См. §4.7.

свободных электронов);  $\Delta$  — параметр, который следует находить, решая уравнение

$$-\frac{2}{U_0} = \frac{\nu}{2} \cdot \int_{E_1}^{E_2} \frac{G(E) \cdot dE}{\sqrt{\Delta^2 + (E - F)^2}}. \quad (\text{П.3.3})$$

В этом уравнении  $G(E)$  — плотность энергетических состояний в одноэлектронном спектре металла (в его несверхпроводящей фазе);  $\nu$  — объем образца;  $E_1$  и  $E_2$  — пределы интегрирования, выбираемые в соответствии с представлениями о механизме взаимодействия электронов; что же касается величины  $U_0$ , то попросту предполагается, что

$$U_{ij} = \begin{cases} U_0 & \text{при } E_1 \leq E \leq E_2; \\ 0 & \text{при } E < E_1 \text{ и } E > E_2. \end{cases}$$

Наименьшее значение  $E_{(1)}$  отвечает  $i$ -спаренному состоянию, находящемуся на Ферми-сфере. При этом

$$E_{(1)} = E_{(0)} + \Delta,$$

что и послужило поводом назвать параметр  $\Delta$  энергетической щелью в спектре одночастичных возбуждений.

Подчеркнем, что физической реальности должно отвечать неравенство  $E_{(1)} > E_{(0)}$ , которому, как следует из формулы (П.3.2), соответствует неравенство

$$\Delta > 0. \quad (\text{П.3.4})$$

В свою очередь знак  $\Delta$ , согласно формуле (П.3.3), зависит только от знака  $U_0$ . Поэтому, каковы бы ни были предположения о механизме межэлектронного взаимодействия, приводящего к сверхпроводимости, следует помнить, что физической реальности должно отвечать неравенство

$$U_0 < 0. \quad ^1) \quad (\text{П.3.5})$$

<sup>1)</sup> Если прибегнуть к аналогии с системой шаров, скрепленных пружинами (см рис. 2.8), то неравенство (П.3.5) означает возникновение отталкивания частиц друг от друга в ответ на возмущение, стремящееся их сблизить, и возникновение притяжения частиц друг к другу в ответ на возмущение, стремящееся их развести.



### 3. Энергетическая щель.

Уравнение (П.3.3) можно решить с легкостью, прибегнув к не-принципиальному упрощающему предположению об очень медленном изменении одной из функций по сравнению с другой на интервале интегрирования. Тогда можно написать (поскольку  $G(E) \sim E^{1/2}$ ):

$$\int_{E_1}^{E_2} \frac{G(E) \cdot dE}{\sqrt{\Delta^2 + (E - F)^2}} \approx G_F \cdot \int_{F - \frac{\delta E}{2}}^{F + \frac{\delta E}{2}} \frac{dE}{\sqrt{\Delta^2 + (E - F)^2}}, \quad (\text{П.3.6})$$

где  $G_F$  — значение плотности состояний при  $E = F$ , а  $\delta E = E_2 - E_1$ .

С учетом равенства (П.3.6) решение уравнения (П.3.3) имеет вид

$$\Delta = \delta E \cdot \frac{\exp\left(-\frac{2}{U_0 \cdot v \cdot G_F}\right)}{\exp\left(-\frac{4}{U_0 \cdot v \cdot G_F}\right) - 1}$$

Что касается величины  $U_y$ , фигурирующей в формуле (П.3.1), то обычно используют представление

$$U_y \cdot v = U_0 \cdot v \equiv u_0, \quad (1) \quad (\text{П.3.7})$$

где  $u_0$  — так называемый потенциал взаимодействия ( $[u_0] = \text{эВ} \cdot \text{см}^3$ ).

С учетом соотношений (П.3.5 + 3.7) приходим к окончательному виду формулы для  $\Delta$ :

$$U_y = \delta E \cdot \frac{e^{\frac{2}{|u_0| \cdot G_F}}}{e^{\frac{4}{|u_0| \cdot G_F}} - 1}. \quad (\text{П.3.8})$$

Напомним, что формула (П.3.8) применима для любого механизма взаимодействия, и рассмотрим возможность реализации высокотем-

1) Предположение, что  $U_y = U_0$ , введено ради упрощения и не является принципиальным.

пературной сверхпроводимости (то есть большой величины  $\Delta$ ) в двух случаях.

1) Пусть  $|u_0| \cdot G_F \gg 4$ . Тогда

$$\Delta = \delta E \cdot \frac{|u_0| \cdot G_F}{4}. \quad (\text{П.3.9})$$

Это значит, что межэлектронное взаимодействие, которому отвечает очень большой потенциал  $|u_0|$ , достаточно распространить на узкий интервал зоны проводимости. Все равно величина  $\Delta$  окажется гораздо большей, чем  $\delta E$ .

Однако имеет смысл обратить внимание на два обстоятельства:

а) для реальных сильно вырожденных коллективов уровень Ферми расположен примерно посредине зоны проводимости, и потому  $G_F = 10^{22} \text{ (эВ} \cdot \text{см}^3)^{-1}$ ;

б) хорошо известному межэлектронному взаимодействию только через фононы отвечает  $|u_0| < 4 \cdot 10^{-23} \text{ эВ} \cdot \text{см}^3$ , и тогда  $|u_0| \cdot G_F \ll 4$ . Не исключено, что и для других типов взаимодействия остается справедливым это же неравенство.

2) Пусть  $|u_0| \cdot G_F \ll 4$  (достаточно, чтобы  $|u_0| \cdot G_F < 1$ ). Тогда

$$\Delta = \delta E \cdot e^{-\frac{2}{|u_0| \cdot G_F}}. \quad (\text{П.3.10})$$

Приведем численный пример:  $\Delta = 0,023 \text{ эВ}$  (при этом  $T_{\text{кр}} = 260 \text{ К}$ );  $|u_0| \cdot G_F = 0,4$ . Из формулы (П.3.10) следует, что в этом случае  $\delta E = 4 \text{ эВ}$ . Следовательно, механизм межэлектронного взаимодействия с относительно небольшим потенциалом приведет к высокотемпературной сверхпроводимости только, если взаимодействие окажется распространенным на всю зону проводимости.

Теперь заметим, что если считать коллектив электронов сверхпроводника коллективом связанных частиц (см. рис. 2.8), то сила связи должна быть результирующей сил притяжения и отталкивания. За притяжение отвечают, конечно, колеблющиеся положительно заряженные ионы решетки. Отталкиваются же электроны друг от друга, естественно, потому, что все они одноименно заряжены. Притяжение преобладает, когда расстояние между взаимодействующими электронами велико, и если представить себе, что они образуют структуру, напоминающую кристалл, то постоянная подобного

кристалла будет тем больше (а сила связи — тем меньше), чем сильнее отталкивание.

Возникает законный вопрос: почему в гамма-квантовом БКШ было учтено одно лишь явно притягивательное взаимодействие электронов друг к другу через посредство колеблющихся ионов решетки? Естественно, это было следствием предположения, что электростатическое поле всех ионов решетки полностью компенсирует электростатическое поле всех электронов.<sup>1)</sup> Тогда, конечно, единственное взаимодействие, которое остается учесть, полагая металл идеально совершенным и находящимся при  $T = 0$ , это то самое электрон-ионное, пренебрежение которым и приводит к адиабатическому приближению.

Разумеется, нельзя признать подобный подход строго логичным. Ведь заранее нельзя утверждать, что отказ от одного лишь адиабатического приближения приведет к поправкам более существенным, чем отказ также и от одноэлектронного.<sup>2)</sup>

Попробуем представить себе, что в случае отказа от обоих приближений введенный ранее параметр  $u_0$  оказался бы суммой:

$$u_0 = u_{0,\phi} + u_{0,\varepsilon},$$

в которой  $u_{0,\phi} (< 0)$  — прежняя величина, учитывающая только фононный вклад (“чистую неадиабатичность”) в межэлектронное взаимодействие, а  $u_{0,\varepsilon} (> 0)$  — величина, отражающая “чистую неоднородность”, то есть отталкивание электронов друг от друга на фоне электростатического поля положительно заряженных ионов решетки.

Чисто одноэлектронное приближение означало бы, что  $u_{0,\varepsilon} = 0$ , а вот при отказе от него мы сталкиваемся с двумя возможностями.

1)  $u_{0,\varepsilon} < |u_{0,\phi}|$  (в частности  $u_{0,\varepsilon} \ll |u_{0,\phi}|$ ), и тогда металл является сверхпроводником (скажем так — низкотемпературным);

2)  $u_{0,\varepsilon} > |u_{0,\phi}|$ , и тогда у подобного металла нет сверхпроводящей фазы.

1) После усреднения по времени поля всех колеблющихся ионов, равно как и поля движущихся электронов, остается отличная от нуля составляющая (зависящая от координат), которую вполне уместно назвать электростатическим полем.

2) Со всеми вытекающими последствиями (динамическим экранированием и т. п.).

Однако, приняв во внимание кулоновское отталкивание электронов друг от друга, нельзя не учитывать и так называемые ферми-дырки в пространственном распределении электронов.<sup>3)</sup> Дело в том, что электроны — фермионы, и потому каждые два электрона с параллельными спинами вынуждены держаться друг от друга подале, а это приводит к уменьшению сил отталкивания. Последнее обстоятельство можно отразить, уменьшив прежний отталкивательный потенциал. Допустим, что

$$u_{0,z} = u_{0,z}^k + u_{0,z}^{об},$$

где  $u_{0,z}^k (> 0)$  учитывает ранее упомянутое — прямое — кулоновское отталкивание, а  $u_{0,z}^{об} (< 0)$  учитывает обменное взаимодействие, которое носит притягивательный характер, поскольку уменьшает силы отталкивания.<sup>1)</sup> Тогда возможна ситуация, в которой

$$u_{0,z}^k < |u_{0,z}^{об}|,$$

и следовательно, обменное взаимодействие усиливает то, которое обусловлено фононами. Вполне возможно, что при этом

$$u_{0,z} < 0, \quad |u_{0,z}| \gg |u_{0,ф}|.$$

В этом случае можно было бы сказать, что имеет место чисто обменный механизм сверхпроводимости.<sup>2)</sup> Здесь, однако, совершенно необходимо подчеркнуть, что электрон-электронное взаимодействие “кулон + обмен” распространяется на всю зону проводимости. Вот тогда-то величина  $\Delta$  может оказаться настолько большой, чтобы свехпроводимость оправданно называлась высокотемпературной.

Заметим также, что в случае преобладания обменного вклада  $|u_{0,z}| < |u_{0,ф}|$  уже нельзя считать параметр  $U_{ij}$ , входящий в формулу (П.3.1), не зависящим от энергии в пределах всей зоны проводимости.

3) См. Н. Марч, У. Янг, С. Сампантхар, Проблема многих тел в квантовой механике, Мир, М., 1969, сс. 47, 48, 189, 190.

1) Существует немало явлений, в которых обменное взаимодействие играет роль притягивающего.

2) Случай, когда  $u_{0,z} > 0, |u_{0,z}| \ll |u_{0,ф}|$ , можно трактовать, как чисто фононный механизм сверхпроводимости.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	Предисловие .....	3
<b>Глава 1.</b>	<b>ДИАМАГНИТНАЯ РЕАКЦИЯ ВЕЩЕСТВА .....</b>	<b>5</b>
§ 1.1	Электродинамический подход .....	5
1.1.1.	Постановка задачи .....	5
1.1.2.	Слабый диамагнетизм .....	9
1.1.3.	Применение полученных результатов на случай массивного образца .....	18
1.1.4.	Свободно движущиеся электроны в пространственно однородном магнитном поле (диамагнетизм Ландау) .....	22
1.1.5.	Диамагнитная реакция нормального металла .....	26
1.1.6.	Сильный диамагнетизм .....	34
§ 1.2.	Термодинамический подход .....	43
1.2.1.	Постановка задачи .....	43
1.2.1.1.	Вращающиеся электроны .....	45
1.2.1.2.	Прямолинейно движущиеся электроны .....	45
1.2.2.	Ситуация в пространственно неоднородном магнитном поле .....	47
1.2.3.	Ситуация в пространственно однородном магнитном поле .....	50
1.2.4.	Коллектив электронов, двигавшихся в отсутствие магнитного поля прямолинейно и равномерно .....	54
1.2.5.	Принципиальные затруднения классической теории .....	57
1.2.6.	Термодинамически равновесное состояние образца в стационарном магнитном поле .....	59
§ 1.3.	Особенности диамагнитной реакции образца — элемента электрической цепи .....	61
1.3.1.	Слабая диамагнитная реакция .....	62
1.3.2.	Сильная диамагнитная реакция .....	65
1.3.3.	Исчезновение потенциального поля внутри идеального проводника — элемента электрической цепи .....	68

§ 1.4.	Два решающих эксперимента .....	72
1.4.1.	Образец в поле постоянного магнита .....	73
1.4.2.	Образец — элемент цепи с источником постоянной ЭДС .....	76
§ 1.5.	Гипотеза о природе сверхпроводимости .....	77
1.5.1.	Требования в части, касающейся диамагнитной реакции .....	77
1.5.2.	Требования в части, касающейся электросопротивления .....	79
1.5.3.	Гипотетическая модель сверхпроводимости .....	79
1.5.4.	Новая проблема .....	81
<b>Глава 2.</b>	<b>ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ МЕТАЛЛА .....</b>	<b>82</b>
§ 2.1.	Постановка задачи .....	82
2.1.1.	Диамагнитная реакция .....	82
2.1.2.	Реакция на включение электрического поля .....	85
§ 2.2.	Распределение электронов по состояниям в пространстве скоростей .....	86
2.2.1.	Степень заполнения $\vec{V}$ -состояния .....	86
2.2.2.	Квазистационарная степень заполнения $\vec{V}$ -состояния .....	90
§ 2.3.	Плотность тока .....	92
2.3.1.	Определение плотности постоянного тока .....	92
2.3.1.1.	Первое исходное выражение для плотности тока .....	93
2.3.1.2.	Определение понятия “концентрация электронов проводимости” .....	94
2.3.1.3.	Определение понятия “средняя скорость частицы” .....	95
2.3.1.4.	Второе исходное выражение для плотности тока .....	99
§ 2.4.	Конструктивное определение стационарной степени заполнения $\vec{V}$ -состояния .....	107
§ 2.5.	Возникновение и установление тока в реальном нормальном металле .....	113

§ 2.6.	Особенности рассеяния электронов на дефектах.....	123
§ 2.7.	Специфика состояния электрона, способного восстанавливать свою скорость после столкновения с дефектом.....	130
2.7.1.	Описание процесса релаксации.....	130
2.7.2.	Самовосстановление степени заполнения $\bar{V}$ -состояния — величины $\bar{N}_c(\bar{V})$ — в случае сверхпроводника.....	135
§ 2.8.	Восстановление тока после акта рассеяния электрона.....	138
<b>Глава 3.</b>	<b>ГАМИЛЬТониАН МЕЖЭЛЕКТРОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ .....</b>	<b>145</b>
§ 3.1.	Преобразование гамильтониана.....	145
3.1.1.	Исходный гамильтониан.....	145
3.1.2.	Преобразование исходного гамильтониана.....	147
§ 3.2.	Гамильтониан БКШ (Бардина, Купера, Шриффера).....	157
3.2.1.	Ликвидация представления о взаимодействии через “посредника” и гамильтониан Фрелиха.....	157
3.2.2.	Пример.....	165
3.2.3.	Гамильтониан БКШ (окончательный вид).....	165
§ 3.3.	Матричный элемент взаимодействия.....	168
§ 3.4.	Оценка справедливости преобразования гамильтониана.....	172
<b>Глава 4.</b>	<b>ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЯ КОЛЛЕКТИВА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ .....</b>	<b>174</b>
§ 4.1.	Предварительные замечания.....	174
§ 4.2.	Необходимое отступление.....	179
§ 4.3.	Постановка задачи.....	184
§ 4.4.	Упрощение задачи.....	185
§ 4.5.	“Коллектив”, состоящий из одной пары.....	190
§ 4.6.	Куперовская электронная пара.....	199
§ 4.7.	Двухчастичный коллектив.....	201
§ 4.8.	Изменения в постановке задачи.....	203

§ 4.9.	Конструирование нового вектора состояния .....	204
4.9.1.	Критерии качества “конструкции” .....	204
4.9.2.	Наглядный способ конструирования .....	206
4.9.3.	Формальный способ конструирования .....	208
<b>Глава 5.</b>	<b>СОСТОЯНИЯ КОЛЛЕКТИВА ЭЛЕКТРОНОВ СВЕРХПРОВОДНИКА .....</b>	<b>213</b>
§ 5.1.	Коллектив сверхпроводящих (взаимодействующих друг с другом) электронов .....	213
5.1.1.	Постановка задачи .....	213
5.1.2.	Установление вида зависимости $\tilde{N}(E)$ .....	216
§ 5.2.	Расчет энергии .....	225
5.3.	Возбужденные состояния коллектива .....	228
5.3.1.	Описание возбужденных состояний .....	228
5.3.2.	Вычисление энергии .....	231
5.3.3.	Энергетический спектр “свободной” квазичастицы .....	235
§ 5.4.	Тепловые возбуждения и критическая температура .....	239
5.4.1.	Качественный анализ .....	239
5.4.2.	Температурная зависимость “щели” — величины $\Delta$ .....	241
5.4.2.1.	Расчет зависимости $E_{кин}(T)$ .....	244
5.4.2.2.	Расчет зависимости $E_{пот}(T)$ .....	249
5.4.2.3.	Установление вида зависимостей $\tilde{N}(E, T)$ и $\tilde{n}(E, T)$ .....	252
5.4.3.	Критическая температура .....	257
§ 5.5.	Критическая плотность тока .....	263
5.5.1.	Реальный эксперимент и интерпретация его результатов .....	263
5.5.2.	Мысленный эксперимент; четыре предположения .....	270
5.5.3.	Появление нормальных электронов в сверхпроводнике (обоснование первых двух предположений) .....	280



5.5.4.	Обоснование остальных предположений.....	284
5.5.5.	Зависимости величин $\Delta$ , $n_{св}$ , $J$ от дрейфовой скорости .....	288
§ 5.6.	Происхождение плюс-зарядов.....	302
<b>Глава 6.</b>	<b>НЕСПАРЕННЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ .....</b>	<b>305</b>
§ 6.1.	Предваряющее замечание .....	305
§ 6.2.	Аналогия с полупроводником .....	308
§ 6.3.	Неспаренные электроны. Энергетическая диаграмма сверхпроводника .....	315
§ 6.4.	Туннелирование неспаренных электронов .....	322
6.4.1.	Контакт “нормальный металл — изолятор — нормальный металл” (НИН-контакт).....	322
6.4.2.	Туннельный контакт “нормальный металл — изолятор — сверхпроводник” (НИС-контакт) .....	328
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>337</b>	
1.	Расчет диамагнитной восприимчивости Ландау .....	337
2.	Об ограничении, налагаемом соотношением неопределенностей.....	347
3.	Описание сверхпроводящего состояния металла и проблема высокотемпературной сверхпроводимости .....	350
<b>СОДЕРЖАНИЕ .....</b>	<b>356</b>	
<b>PRINCIPLES OF PHYSICS OF SUPERCONDUCTORS .....</b>	<b>361</b>	

# PRINCIPLES OF PHYSICS OF SUPERCONDUCTORS

The book is dedicated to detailed description of physical principles which form the basis of the theory of superconductivity. Strange as it may seem but just the basic principles that are difficult to get an idea of to day. As far as the Josephson effects or problems of superconductor electronics and electrical engineering are concerned these problems are sufficiently distinctly and circumstantially presented in many monographs and text-books written before this book.

The presented book differs very much from available ones written the same subject matter.

1. The presentation here is underway by purely inductive method. The point of departure is the results (are considered to be unexpected for yet unexperienced reader) of two experiments: the discovery of ideal conductivity of metal that containing scatterers of electrons and the discovery of strong diamagnetic response of a metal having ideal conductivity (Meissner-Ochsenfeld effect).

The reader even once unexperienced is expected to be aware of the ideal conductivity of normal ("usual") metal on condition (that cannot be realized in practice) that it has no a defect to scatter electrons. The reader however might be surprised by the fact that nonperfect metal — with defects — is able to come in a phase when electrons collide with defects (as before) but nevertheless the current does not fade away in spite of the absence of electric field that had initiated the current in a metal when it is an element of electric circuit.

Furthermore the reader is also supposed to know about the existence of a strong diamagnetic response of electrons of normal metal to alternate magnetic field (skin-effect). Nevertheless reader's attention is to be attracted to the fact that the scattering of electrons on defects is a matter of principle for giving rise to skin-effect. (It goes without saying that it is due to scattering that the strong diamagnetic response which arises at the stage of build-up of magnetic field does not survive when the field becomes steady). In this case if one takes a superconductor without defects and at  $T = 0$  K it seem a strong diamagnetic response should not emerge at all when the field is putting on. Strange as it may seem but it does emerge. Naturally, once it is

there it would certainly survive steady-state magnetic field since the specific resistance of a superconductor is zero.

2. The theory further worked is to explain by undiscrepant way both mentioned results. To verify the conclusions of the theory three other fundamental experiments have been used: in one of them the existence of critical current was discovered; in the other the existence of critical temperature was discovered; in the third peculiarities of the tunneling at contacts were discovered.

On examining of any aspect of the theory the first qualitative analysis is made to create clear and obvious idea of the phenomenon (an explanation that is made "with fingers" as it is called in Russia). It is followed by analytical calculation with full details. In addition, in the book one gives the derivation of the temperature dependence of energy gap. This derivation is important in methodical attitude nevertheless it is absent in literature. The important fragments of the derivation are in the pioneer work of Bardeen, Cooper, Schriffer, but comprehensive data were dropped in their article of course.

The book contains a series of new results. These are:

1. The proof of purely classic nature of weak Landau diamagnetism as well as of strong diamagnetic response of a superconductor;

2. A derivation of Londons' formula  $\text{rot } \vec{J} = -\vec{H} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$  (made both within electrodynamic and within thermodynamic);

3. A qualitative explanation of non-attenuation of the current after the electric field vanishes (though electron-scattering on defects takes place);

4. A qualitative explanation of reversable transition between normal and superconductive phase;

5. A new derivation of Frohlich hamiltonian;

6. The derivation of BCS wave function;

7. A derivation of the expression for critical current density.

8. An explanation of doubling of energy gap;

The discoursed book is intended for lecturers and students and engineers specializing in solid-state physics, solid-state electronics, physics generally, experimental physics, theoretical physics.

It is supposed readers preliminarily studied courses on classical electrodynamic, thermodynamic, principles of the quantum theory and principles of solids.

The content of the book is quoted below.

**PART I. DIAMAGNETIC RESPONSE OF SUBSTANCE**

- § 1.1 Electroynamical point of view
  - 1.1.1 Problem's statement
  - 1.1.2 Weak diamagnetizm
  - 1.1.3 The use of received results to case of massive sample
  - 1.1.4 Free electrons moving in spatially homogenous magnetic field (Landau's diamagnetizm)
  - 1.1.5 Diamagnetic response of normal metal
  - 1.1.6 Strong diamagnetizm
- § 1.2 Thermodynamical point of view
  - 1.2.1 Problem's statement
    - 1.2.1.1 Rotating electrons
    - 1.2.1.2 Straigh-line moving electrons
  - 1.2.2 A situation in a spatially inhomogenous magnetic field
  - 1.2.3 A situation in a spatially homogenous magnetic field
  - 1.2.4 The collective of electrons that are moving straight-line and uniformly when magnetic field is absent
  - 1.2.5 The fundamental difficulties of classical theory
  - 1.2.6 Thermal equilibrium of the sample being in the stationary magnetic field
- § 1.3 The peculiarity of a diamagnetic response of the sample which is an element of electrical circuit
  - 1.3.1 A weak diamagnetic response
  - 1.3.2 A strong diamagnetic response
  - 1.3.3 An attenuation of potential electrical field in ideal conductor which is an element of electrical circuit
- § 1.4 The two determinant experiments
  - 1.4.1 A sample in the field of permanent magnet
  - 1.4.2 A sample as an element of electrical circuit containing permanent emf-source
- § 1.5 Hypothesis on the nature of superconductivity
  - 1.5.1 As far as diamagnetic response is concerned
  - 1.5.2 As far as electrical resistance is concerned
  - 1.5.3 Hypotetical model of superconductivity
  - 1.5.4 A new problem

**PART II. PECULIARITIES OF ELECTRONS' MOVEMENT IN A METAL**

- § 2.1 Problem's statement
  - 2.1.1 Diamagnetic response
  - 2.1.2 The response to a putting on of electric field
- § 2.2 Distribution of electrons at states in velocity-space
  - 2.2.1 The occupancy of  $\vec{v}$ -state
  - 2.2.2 Quasistationary occupancy of  $\vec{v}$ -state
- § 2.3 Current density
  - 2.3.1 The determination of permanent current density
  - 2.3.2 First initial expression for current density
  - 2.3.3 The determination of the concept of "the concentration of electrons of conductance band"
  - 2.3.4 The determination of the concept of "the average velocity of a particle"
  - 2.3.5 Second initial expression for current density
- § 2.4 Constructional determination of stationary occupancy of  $\vec{v}$ -state
- § 2.5 The rise and establishment of the current in a normal metal that contains defects
- § 2.6 Peculiarities of the scattering of electrons on defects
- § 2.7 Peculiar features of the state of the electron that is capable to restore its velocity after collision with a defect
  - 2.7.1 The description of relaxation process
  - 2.7.2 Self-restoration of occupancy of  $\vec{v}$ -state in case of superconductor
- § 2.8 The restoration of the current after an act of scattering of electron

**PART III. AN ELECTRON-ELECTRON INTERACTION HAMILTONIAN**

- § 3.1 The transformation of hamiltonian
  - 3.1.1 Initial hamiltonian
  - 3.1.2 The transformation of initial hamiltonian

- § 3.2 BCS-hamiltonian
  - 3.2.1 Elimination of the imagination of interaction by means of “mediator” and Fröhlich-hamiltonian
  - 3.2.2 An example
  - 3.2.3 BCS-hamiltonian (final form)
- § 3.3 Matrix element of interaction
- § 3.4 An estimation of justice of transformation of hamiltonian

#### **PART IV. DESCRIPTION OF THE STATE OF THE COLLECTIVE OF INTERACTING PARTICLES**

- § 4.1 Foregoing notices
- § 4.2 Necessary digression
- § 4.3 Problem’s statement
- § 4.4 A simplification of the problem
- § 4.5 One-particle “collective”
- § 4.6 Cooper’s electronic pair
- § 4.7 Two-particle collective
- § 4.8 Modification of problem’s statement
- § 4.9 A design of a new wave function
  - 4.9.1 Criteria of the quality of the “construction” of wave function
  - 4.9.2 A clear method of the design
  - 4.7.3 Formal method of the design

#### **PART V. THE STATES OF THE COLLECTIVE OF ELECTRONS OF A SUPERCONDUCTOR**

- § 5.1 A collective of superconducting (interacting) electrons
  - 5.1.1 Problem’s statement
  - 5.1.2 The establishment of the form of the  $E$ -dependence of the occupancy of  $E$ -state
- § 5.2 A calculation of the energy
- § 5.3 Excited states of a collective
  - 5.3.1 A description of excited states
  - 5.3.2 A calculation of the energy
  - 5.3.3 An energetical spectrum of “free” quasi-particle

- § 5.4 Thermal excitations and critical temperature
  - 5.4.1 Qualitative analysis
  - 5.4.2 Temperature dependence of a gap
    - 5.4.2.1 A calculation of temperature dependence of kinetic energy
    - 5.4.2.2 A calculation of temperature dependence of potential energy
    - 5.4.2.3 The establishment of forms of the  $E, T$ -dependences of occupancies of  $E$ -states (values  $\bar{N}$  and  $\bar{n}$ )
  - 5.4.3 Critical temperature
- § 5.5 Critical current density
  - 5.5.1 Real experiment and the interpretation of its results
  - 5.5.2 Imaginary experiment; four assumptions
  - 5.5.3 The generation of normal electrons in superconductor (basing of the two first assumptions)
  - 5.5.4 The basing of the remaining assumptions
  - 5.5.5 The dependence of values  $\Delta, n_{sc}, J$  on drift velocity
- § 5.6 The origin of "plus-charge-carriers"

## PART VI. "NON-COUPLING" ELECTRONS

- § 6.1 The forgoing notice
- § 6.2 The analogy with a semiconductor
- § 6.3 Non-coupling electrons. The energy diagram of a superconductor
- § 6.4 Tunneling of non-coupling electrons
  - 6.4.1 The contact "normal metal-insulator-normal metal"
  - 6.4.2 The contact "normal metal-insulator-superconductor"

## APPENDIX

1. The calculation of Landau's diamagnetic susceptibility
2. On restriction imposed with the relation of indeterminacy
3. The description of the superconducting state of a metal and the problem of high temperature superconductivity



## Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

**Издательство «УРСС»** специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии Наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.

**Издательство «УРСС»** полностью финансирует и осуществляет издание переводов книг на русском языке по вышеназванной тематике на испанский и английский языки.

**Издательство «УРСС»** проводит допечатную подготовку двух ежемесечных и одного ежеквартального журналов.

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя весь спектр работ по полной подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

## Уважаемые авторы и издатели!

**Издательство «УРСС»** приглашает авторов, издательства и другие организации к взаимовыгодному сотрудничеству по вопросам распространения печатной продукции.

В настоящее время созданный при **Издательстве «УРСС»** Межиздательский Дистрибуторский центр полностью или частично ведет работу по распространению книг ряда авторов и шести издательств, среди которых московские издательства «МЦНМО» (Московский Центр непрерывного математического образования), «Янус» и «Факториал».

**Книги издательства «УРСС» можно приобрести в магазинах**

- Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)
- Дом технической книги» (Ленинский пр., 40)
- Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)
- Графоман» (м. Павелецкая, ул. Бахрушина, 28)
- Гилея» (м. Боровицкая, ул. Знаменка, 10)
- Летний сад» (м. Баррикадная, ул. Б. Никитская, 46)
- Союз Театральных Девятей» (Страстной б-р, 10)
- Лит.-Худ. салон РГБИ» (ул. Кузнецкий мост, 1)
- С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

**а также в книжных кioskах МГУ (Воробьевы горы)**

**По всем интересующим Вас вопросам  
Вы можете обратиться в издательство:  
тел./факс 135-44-23, тел. 135-42-46  
или электронной почтой [urss@urss.isa.ac.ru](mailto:urss@urss.isa.ac.ru)  
Полный каталог изданий представлен  
в Internet: <http://urss.isa.ac.ru>**







**КНИГИ**  
**издательства УРСС**  
по физической и математической тематике:

*Г А Сарданавили* **Современные методы теории поля.**  
Том 1. Геометрия и классические поля  
Том 2. Геометрия и классическая механика  
Том 3. Алгебраическая квантовая теория поля  
Том 4. Геометрия и квантовые поля

*В Эбеллинг, А Энгель, Р Файстель* **Физика процессов эволюции.**

*М Теибор* **Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Введение.**

*И Пригожин, И Стенгерс* **Время, хаос, квант.**

*И Пригожин, И Стенгерс* **Порядок в хаосе.**

*В Гейзенберге* **Научные труды (в 2-х томах)**

*Д В Георгиевский* **Устойчивость процесса деформирования вязкопластических тел.**

*Г Н Шикин* **Основы теории солитонов в общей теории относительности.**

*И А Квасникова* **Молекулярная физика.**

*А В Карапетян* **Устойчивость стационарных движений.**

*М И Петрашнев, Е Д Трифонов* **Применение теории групп в квантовой механике.**

*В Г Сурдин* **Рождение звезд.**

*И И Ляшко, А К Боярчук, Я Г Гац, Г П Головач* **Справочное пособие по высшей математике (в 5 томах)**

*Б А Дубровин, С П Новиков, А Т Фоменко* **Современная геометрия. Методы и приложения. 4-е издание, исправленное и дополненное**

*Ю А Неретин* **Категории симметрий и бесконечномерные группы.**

*Г Н Шикин* **От игр к играм. Математическое введение.**

*Э Б Винберг, А Л Онищик* **Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.**

*В И Арнольд, В В Козлов, А И Нейштадт* **Математические аспекты классической и небесной механики.**

*В И Арнольд* **Математические методы классической механики.**

**Труды Московского Математического Общества. №59. (гл ред О А Озешник)**

*Э Картан* **Интегральные инварианты (с добавлением В В Козлова)**

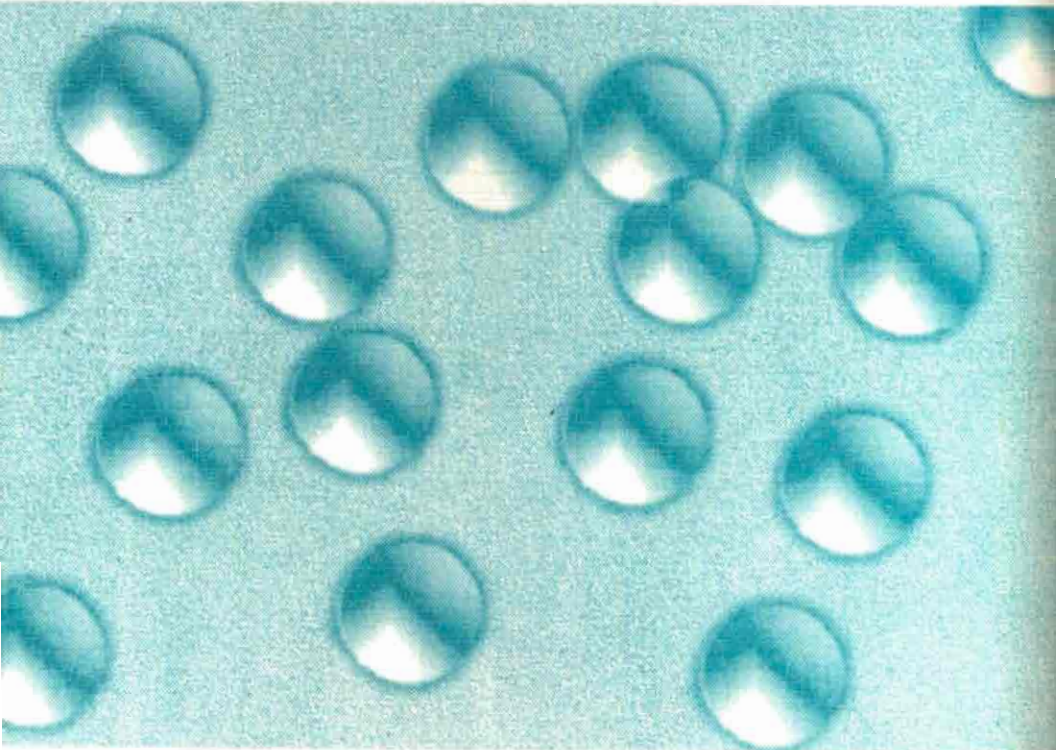
*И Ф Овчинников* **Методологические принципы в истории научной мысли.**

**Основы радиофизики (под редакцией А С Логгинова)**

*Е А Волкова, А М Попов, А Т Рахимов* **Квантовая механика на персональном компьютере.**

По всем интересующим Вас вопросам  
Вы можете обратиться в издательство:  
тел./факс 135-44-23, тел. 135-42-46  
или электронной почтой [urss@urss.isa.ac.ru](mailto:urss@urss.isa.ac.ru)  
Полный каталог изданий представлен  
в Internet: <http://urss.isa.ac.ru>.





интернет-магазин

**OZON.RU**



18702798